Suites et séries numériques, calcul de primitives.

Cours B02
Licence STS, Mention Mathématiques
Université de Rennes 1

Francis Nier
Sahbi Keraani

Ce cours porte sur les suites et séries réelles et complexes et sur les calculs d'intégrales et primitives.

Bien que de nombreux ouvrages de premier cycle existent, il nous a semblé utile d'écrire ces notes pour plusieurs raisons :

– Pour que les étudiants s'affranchissent en amphi d'un travail de copie qui les détourne d'une compréhension directe des explications données.
– Pour rassembler de façon synthétique les connaissances exigées aux examens de ce cours.
– Pour faciliter le travail durant le semestre en indiquant par exemple aux étudiants les exercices à préparer par leur numéros, ou encore pour indiquer au chargés de TD ou de TP à quel point le cours en amphi s'est arrêté.
– Compte tenu du morcellement des enseignements de mathématiques, il est bon que les étudiants comme les collègues enseignants aient une idée précise des notions abordées dans ce cours ainsi que du point de vue de présentation choisi.

Différents renvois à d'autres cours de mathématiques de la Licence, telle qu'elle a été mise en place à l'Université de Rennes I dans le cadre de la réforme LMD, sont indiqués dans ces notes (voir http ://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/Coursdemaths.html pour la numérotation des cours).

Ce cours est prévu pour fonctionner sur 12 semaines avec 2 heures de cours et 2 heures de TD par semaine. A cela s'ajoutent 3 séances de TP pour travailler sur la Base Raisonnée d'Exercices (http ://tdmath.univ-rennes1.fr). Un certain nombre d'exercices sont issus de cette base ou de la collection d'exercices rassemblée par A. Bodin (http ://math.univ-lille1.fr/∼bodin/exercice.html).

Enfin nous remercions F. Guimier, J. Camus, T. Jecko, L. Moret-Bailly qui au cours de diverses discussions nous ont aidé à bien calibrer ce cours.

Table des matières

Chapitre 1

Suites réelles et complexes. Convergence.

1.1 L'ensemble des réels.

Nous supposons connus les ensembles
- $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs qui muni de l'addition $+$ forme un groupe commutatif ;
- $\mathbb{Q}$ des rationnels qui muni de l'addition $+$ et de la multiplication forme un corps commutatif.

Ces ensembles sont inclus suivant $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et sont munis d'une relation d'ordre total $x \leq y$ qui se dit « x inférieur ou égal à y ».
La représentation intuitive de $\mathbb{R}$ se fait sous la forme d'une droite. On parle de la droite réelle. Néanmoins cette représentation graphique ne permet pas de bien comprendre la distinction entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. Ce cours sur les suites permettra entre autres choses d'affiner notre perception. Il nous faut d'abord dire précisément ce qu'est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition 1.1.1. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *est un corps commutatif totalement ordonné, contenant* $\mathbb{Q}$*, archimédien et vérifiant la propriété de la borne supérieure.*

Remarque. Il s'agit là d'une définition dite « axiomatique » qui définit $\mathbb{R}$ en précisant les propriétés qu'il doit vérifier mais sans rien dire sur l'existence d'une tel ensemble. En fait comme pour $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, il est possible de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et donc de montrer ainsi son existence. Nous dirons quelques mots de cela plus loin.
Cette définition de $\mathbb{R}$ rassemble beaucoup de propriétés. Une explication de texte s'impose.
- « $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif »
  - $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif
    - La loi de composition interne $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
    - $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $+$ noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.

- Tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un inverse pour $+$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y = y+x = 0$. Cet inverse est unique. On l'appelle opposé et on le note $-x$. On abrège l'écriture $x + (-y)$ en $x - y$.
- Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
  - En notant $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe, d'élément neutre 1 et pour lequel l'inverse est noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Le produit de deux réels est noté $x \times y$ ou $x.y$ ou xy.
  - Les lois de composition internes $+$ et $\times$ sont compatibles : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y)z = xz + yz$ et $x(y + z) = xy + xz$.
  - Un corps commutatif est un corps (pptés ci-dessus) dont le groupe multiplicatif est commutatif :$xy = yx$.
- « totalement ordonné »
  - $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ total
    - antisymmétrie :$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$.
    - réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
    - transitivité :$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
    - totalité : On peut toujours comparer deux réels : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.
  - Cette relation d'ordre est compatible avec les lois du corps, $(+, \times)$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z), \\ & (z \geq 0 \quad \text{et} \quad x \leq y) \Rightarrow (zx \leq zy)\,. \\ \text{(conséquence} \quad & (z \leq 0) \quad \text{et} \quad x \leq y) \Rightarrow (zy \leq zx)\,.) \end{aligned}$$

Avec cette structure, on peut définir la valeur absolue suivant $|x| = \max\{x, -x\}$, qui vérifie l'inégalité triangulaire $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 1.1. *Vérifier dans R les relations :*

$$\begin{aligned} & (|a| \leq b) \Leftrightarrow (-b \leq a \leq b) \\ & |x + y| \leq |x| + |y|\ . \end{aligned}$$

- « contenant $\mathbb{Q}$ »

  L'application qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe l'élément $(\overbrace{1 + \cdots + 1}^{n \text{ fois}})$ d'un corps $\mathbb{K}$ pour $n \geq 0$ et $-(\overbrace{1 + \cdots + 1}^{n \text{ fois}})$ pour $n \leq 0$ définit un morphisme de groupe. Son noyau est soit $p\mathbb{Z}$ avec p premier soit $\{0\}$. Dans le premier cas on dit que $\mathbb{K}$ est de caractéristique p. Dans le deuxième cas on dit qu'il est de caractéristique 0. Dans ce deuxième cas, le morphisme est injectif et on identifie $\mathbb{Z}$ avec un sous ensemble de $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps il contient aussi les $\frac{1}{q}$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$ et $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. On dit donc à ce niveau que $\mathbb{R}$ est un corps de caractéristique nulle.
- « archimédien »

  Il s'agit de la propriété suivante : Etant donnée une échelle de graduation $r > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{Z}, n_x r \leq x < (n_x + 1)r\,.$$

  Le n_x est unique. Cette propriété permet de définir la partie entière d'un réel x notée $E(x)$ (ou $[x]$) comme l'entier n_x obtenu avec $r = 1$.
  Il existe des corps contenant $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas archimédiens.

Exercice 1.2. *Vérifier l'unicité du n_x.*

– « vérifiant la propriété de la borne supérieure »

  – Borne supérieure : On se place dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$, on dit qu'une partie $A \subset E$ admet une borne supérieure b si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément :

$$\forall a \in A, a \leq b$$
$$(\forall a \in Aa \leq M) \Rightarrow (b \leq M)\,.$$

  Cette borne supérieure est unique si elle existe.
  – Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ vérifie la propriété de la borne supérieure si toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. C'est par définition le cas de $\mathbb{R}$.
  – Soit $A \subset \mathbb{R}$, on note $\sup A$ ou $\sup_{x\in A} x$ sa borne supérieure. L'égalité $b = \sup A$ est caractérisée par

$$\text{(majorant)} \qquad \forall a \in A, a \leq b\,; \tag{1.1}$$
$$\text{(plus petit des majorants)} \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \cap [b - \varepsilon, b]\,. \tag{1.2}$$

Remarque. C'est la propriété de la borne supérieure qui fait la distinction entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. En effet $\mathbb{Q}$ vérifie toutes les autres propriétés sauf cette dernière : L'ensemble de rationnels $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$ mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1.2 Définition et exemples.

Exemple.

1. Exemples obtenus par observation d'une évolution. La balle qui rebondit. $t_n =$ temps du n^e rebond.
2. Exemples obtenus par modélisation : Dans l'exemple de la balle, on suppose que la balle rebondit avec la vitesse ev si elle arrive avec la vitesse v sur le sol, avec $e \leq 1$. A l'aide des lois de la physique on peut étudier la suite des vitesses de rebonds $(v_n)_{n\in ?}$ et des instants de rebonds $(t_n)_{n\in ?}$. On peut se poser la question de savoir si il y a une infinité de rebonds auquel cas l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ et si la balle s'arrête au bout d'un certain temps ou rebondit indéfiniment $\lim_{n\to\infty} t_n = T \in \mathbb{R}$ ou $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$.
3. Exemple de suite récurrente : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.Est-elle définie ? par quelle formule ?
4. Exemple de suite récurrente double : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

5. Suites "logiques" et leurs pièges ex : 1, 3, 5, 7 peut se compléter "logiquement" en 1, 3, 5, 7 , 9, 11 ou 1,3,5,7,11,13,.. ou ...

Définition 1.2.1. *On appelle suite réelle toute application de* $\mathbb{N}$ *(ou d'une partie de* $\mathbb{N}$*) dans* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{N} \ni n \to u_n \in \mathbb{R}$*. On note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite,* u_n *est appelé* $n^{ième}$ *terme de la suite et* n *l'indice de* u_n *.*
Plus généralement pour un ensemble E*, les applications de* $\mathbb{N}$ *(ou d'une partie de* $\mathbb{N}$*) dans* E *sont appelées suites de* E*. On parle ainsi de suites complexes quand* $E = \mathbb{C}$ *et de suites numériques quand* $E = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *.*

Définition 1.2.2. *Si l'ensemble* E *est muni d'une relation d'ordre* $\leq$ *(ex.* $\mathbb{R}$*) les suites croissantes (resp. décroissantes, strictement croissantes, strictement décroissantes) sont les suites vérifiant* $u_n \leq u_m$ *(resp* $u_n < u_m$*,* $u_n \geq u_m$*,* $u_n > u_m$*) dès que* $n \leq m$ *(resp.* $n < m$*,* $n \leq m$*,* $n < m$*). Une suite est dite monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.*

Exercice 1.3. *Montrer qu'il suffit de vérifier pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1}$ *(resp.* $u_n < u_{n+1}$*) pour que la suite soit croissante (resp. strictement croissante).*

Définition 1.2.3. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *est*
– *constante si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = u_0$ *.*
– *stationnaire si la suite est constante à partir d'un certain rang :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}\,.$$

– *périodique s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+N} = u_n\,.$$

Définition 1.2.4. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* E *(*E *ensemble) et* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite strictement croissante de* N*, la suite* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *est appelée sous-suite (ou suite extraite) de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Exemple. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut considérer par exemple la sous-suite correspondant aux indices pairs $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. Mais une suite extraite n'est pas toujours donnée par une règle aussi explicite. On peut d'ailleurs considérer l'ensemble de toutes les suites extraites d'une suite donnée, dont on peut vérifier qu'il est non dénombrable (voir Feuille d'exercices).

Définition 1.2.5. *On dit qu'une suite réelle est bornée (resp. bornée supérieurement, bornée inférieurement) si il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A \qquad (A \geq 0)\,. \\ (resp.) \quad & \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A\,. \\ (resp.) \quad & \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A\,. \end{aligned}$$

Exercice 1.4. *Pour* $a > 0$ *on se donne la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})\,, \quad u_0 > 0\,.$$

Vérifier que la suite est bien définie, monotone à partir de $n = 1$ *et bornée.*

1.3 Suite convergente.

Définition 1.3.1. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite (quand n tend vers l'infini).

Remarque. Traduction : Un intervalle arbitrairement petit autour de ℓ, $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Proposition et Définition 1.3.2. *Unicité : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une limite. On note alors*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

pour dire que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration : Supposons que $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ sont des limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\ell_1 \neq \ell_2$, on prend $\varepsilon = \frac{|\ell_2 - \ell_1|}{4}$. Par définition de la convergence on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1, &\quad |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon\,, \\ \forall n \geq n_2, &\quad |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Pour $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$4\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1| \leq |\ell_2 - u_{n_\varepsilon}| + |u_{n_\varepsilon} - \ell_1| \leq 2\varepsilon\,.$$

Cela est impossible pour $\varepsilon > 0$. ■

Proposition 1.3.3. *Une suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration : Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence. Pour $n \geq n_1$, on a $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{n_1}|, |\ell| + 1\}\,.$$

■

Remarque. La contraposée de cette proposition dit qu'une suite non bornée ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3.4. *Une suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente. On a de plus*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n, &\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ croissante}\,. \\ \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n, &\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ décroissante}\,. \end{aligned}$$

N.B. La limite (ou borne supérieure) d'une suite croissante n'est pas en général le majorant que l'on a trouvé au premier abord.

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. Comme $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure $b = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. En utilisant la deuxième condition (1.2), on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$b - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq b\,.$$

Comme la suite est croissante on a trouvé $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad b - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq u_n \leq b\,,$$

ou encore

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad |u_n - b| \leq \varepsilon\,,$$

ce pour tout $\varepsilon > 0$. ■

Exercice 1.5. *On reprend la suite récurrente* $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$, *définie pour* $a > 0$. *Montrer que la suite converge.*

Proposition 1.3.5. *Si* u_n *tend vers* ℓ *et* $\ell < \ell'$, *alors, pour* n *assez grand,* $u_n < \ell'$.

Démonstration : En prenant $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2}$, on obtient

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad u_n \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2} < \ell'.$$

■

Proposition 1.3.6. *Si deux suites réelles convergentes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

alors on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

Démonstration : Supposons $\ell = \lim_{n\in\mathbb{N}} v_n < \lim_{n\in\mathbb{N} u_n} = \ell'$. Alors par la proposition précédente on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad v_n < \frac{\ell + \ell'}{2}\,.$$

De même, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, \quad u_n > \frac{\ell + \ell'}{2}\,.$$

Avec $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, on a alors $u_{n_3} > \frac{\ell+\ell'}{2} > v_{n_3}$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

N.B. Les limites strictes ne sont pas conservées. Exemple : $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$.

1.4 Calculs de limites.

Proposition 1.4.1. *Pour une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$*, on a l'équivalence entre*

i) $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$,

ii) $\lim_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0$,

iii) *il existe une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de limite* 0 *telle que* $|u_n - \ell| \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Démonstration : La définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

exprime exactement la condition ii), en remarquant $|u_n - \ell| = ||u_n - \ell| - 0|$.
La condition iii) implique la condition ii) par passage à la limite dans les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \ell| \leq v_n \,.$$

Enfin ii) contient la condition iii). Il suffit de prendre $v_n = |u_n - \ell|$. ■

Théorème 1.4.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles convergentes et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On a les propriétés suivantes*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) \tag{1.3}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) \,. \tag{1.4}$$

Enfin si v_n *ne s'annule jamais (ou* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang) et si* $\lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$ *alors on a aussi :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n} \,. \tag{1.5}$$

Démonstration : On pose $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell'$.

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{et} \qquad \forall n \geq n_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Avec $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ on obtient

$$\forall n \geq n_3, \quad |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon \,.$$

On a montré (1.3).
Pour (1.4), on considère d'abord le cas où $v_n = \lambda \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $\varepsilon > 0$ on sait trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$
On en déduit
$$\forall n \geq n_1, \quad |\lambda u_n - \ell| \leq \varepsilon\,.$$
Ainsi on a montré
$$\lim_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n \tag{1.6}$$
(pour $\lambda = 0$ le résultat est vrai aussi).
Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M \quad \text{et} \quad |v_n| \leq M'\,.$$
On écrit
$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &= |u_n v_n - \ell v_n + \ell(v_n - \ell')| \\ &\leq |u_n - \ell|\,|v_n| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \leq M'\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'|\,. \end{aligned}$$
D'après (1.3) (1.6) le terme de gauche a pour limite 0 quand $n \to \infty$. On applique alors la Proposition 1.4.1.
Avec (1.4) le cas du quotient (1.5) se ramène à montrer $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{\ell'}$. On remarque que l'on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_2, \quad \|v_n - \ell\| \leq \frac{\ell}{2}\,.$$
On en déduit $|v_n| \geq \frac{\ell}{2}$ pour $n \geq n_1$. Ainsi la suite $(\frac{1}{|v_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
$$\forall n \in n_1, \quad \left|\frac{1}{v_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|v_0|}, \ldots, \frac{1}{|v_{n_1}|}, \frac{2}{\ell}\right\} = M\,.$$
On écrit maintenant
$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{|\ell - v_n|}{|\ell|\,|v_n|} \leq \frac{M}{|\ell|}\,|v_n - \ell|$$
où le dernier membre a pour limite 0. On conclut avec la Proposition 1.4.1. ∎

Exercice 1.6. *Toujours avec la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, $u_0 > 0$, définie pour $a > 0$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et qu'il est limite d'une suite de rationnel.*

Théorème 1.4.3. *Théorème des gendarmes. Soit trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*
$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n \leq w_n \\ \textit{et} \quad &\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell\,. \end{aligned}$$
Alors on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Démonstration : On écrit d'abord

$$|v_n - u_n| \leq w_n - u_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\,;$$

puis

$$u_n = v_n + (v_n - u_n) \overset{n\to\infty}{\to} \ell + 0 = \ell\,.$$

■

Définition 1.4.4. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante ;*
– $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante ;*
– $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 1.4.5. *Théorème des suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent dans $\mathbb{R}$ et ont même limite.*
On a de plus

$$\forall m, m' \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n \leq v_{m'}$$

Remarque. Contrairement au théorème des gendarmes, il n'est pas nécessaire de connaître la limite ici pour dire qu'elle existe.

Démonstration : La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en tant que suite convergente. On a alors

$$u_n = v_n + (u_n - v_n) \leq v_0 + (u_n - v_n) \leq v_0 + M\,.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée. Elle admet une limite $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. De même avec

$$v_n = u_n + (v_n - u_n) \geq u_0 - M\,,$$

on en déduit $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell' = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Avec la troisième condition on obtient $\ell = \ell'$. ■

1.5 Limites infinies.

1.5.1 Définitions.

Définition 1.5.1. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$)quand $n \to \infty$ si*

$$\begin{aligned} & \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_M \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_M, u_n \geq M\,. \\ (\textit{resp.}) \qquad & \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_M \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_M, u_n \leq -M\,. \end{aligned}$$

On note dans ce cas

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty, \quad (\textit{resp.}) \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty\,.$$

Autrement dit pour $M > 0$ arbitrairement grand, tous les u_n sont au-dessus de M à partir d'un certain rang.

Remarque. Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée.

Exercice 1.7. *On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Vérifier qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Justifier l'écriture $\lim_{n\to\mathbb{N}} u_n = \ell$ pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Exercice 1.8. *Ecrire à l'aide de quantificateurs les définitions de suites non bornées, non bornées inférieurement et non bornées supérieurement. Donner un exemple de suite non bornée supérieurement qui n'a pas pour limite $+\infty$.*

Proposition 1.5.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de $\mathbb{R}$. Alors la suite converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si elle n'est pas bornée.*

Démonstration : Si une suite croissante est bornée, alors elle converge dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas on n'a pas $\lim_{n\to\infty} \neq +\infty$. Si une suite croissante n'est pas bornée. Pour $M > |u_0|$, il existe $n_M \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_M}| \geq M$. Comme $u_{n_M} \geq u_0$, et $|u_{n_M}| > |u_0|$, on ne peut avoir $u_{n_M} \leq 0$. Comme la suite est croissante, on a

$$\forall n \geq n_M, \quad u_n \geq u_{n_M} \geq M\,.$$

■

N.B. Cela est bien sûr faux si la suite n'est pas monotone. Voir exercice précédent.

Proposition 1.5.3. *Si un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, non vide, n'est pas majoré, alors il existe une suite de points de E qui tend vers $+\infty$.*

Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E$ tel que $u_n \geq n$. ■

1.5.2 Calculs de limites (bis).

Proposition 1.5.4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont positifs à partir d'un certain rang. Alors on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.*

Démonstration : 1) Supposons $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Pour $M > 0$, il existe $n_M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_M, \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{M}\,.$$

On a trouvé $n_M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_M, \quad \frac{1}{u_n} \geq M$$

et ce pour $M > 0$ arbitrairement grand. D'où $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.
2) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$, alors pour $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

On a trouvé $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad 0 < u_n \leq \varepsilon$$

et ce pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. D'où $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

Proposition 1.5.5. *Si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_n u_n = +\infty$, alors on a $\lim_n v_n = +\infty$.*

Démonstration : Soit $M > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_M, \quad v_n \geq u_n \geq M.$$

On en déduit $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$. ■

Théorème 1.5.6. *Les règles de calculs des limites se résument dans les tableaux suivants. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad et \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \ell'.$$

$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n$?	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*FI*
$\ell' = -\infty$	$-\infty$	*FI*	$-\infty$

$\lim_{n\to\infty} u_n v_n$?	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell = +\infty$	$\ell = 0$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell\ell'$	$+\infty$	0
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*FI*
$\ell' = 0$	0	*FI*	0

L'abbréviation FI signifie « Forme Indéterminée ». Autrement dit il peut arriver n'importe quoi si on n'a pas d'information supplémentaire sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration : Supposons $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par M_0. Pour $M > 0$, il existe $n_M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_M, \quad v_n \geq M + M_0 \,.$$

On a alors pour tout $n \geq n_M$

$$u_n + v_n \geq -|u_n| + M + M_0 \geq M \,,$$

cela avec $M > 0$ arbitrairement grand. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$.
Cas $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$. On peut prendre $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$, auquel cas la suite $(u_n + v_n = (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. ∎

Exercice 1.9. *Rédiger les démonstrations pour toutes les cases du tableau. Dans le cas des formes indéterminées, donner deux exemples avec des limites distinctes ou un exemple sans convergence.*

Comment lever les formes indéterminées ? On peut

1. mettre en évidence les termes prépondérants. Exemple : $\frac{n^2+1}{n-1}$
2. majorer ou minorer. Exemple : $\frac{\sin\frac{1}{n}}{n+1}$
3. si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ (on dit que u_n et v_n sont équivalents) et si (v_n) est plus "sympathique " que (u_n), remplacer u_n par $\frac{u_n}{v_n} \times v_n$.
4. comparer des ordres de grandeur. Exemples : Suites $\frac{a^n}{n}$, $\frac{\ln n}{n}$.

Exercice 1.10. *Traiter tous les exemples ci-dessus.*

1.6 Suites complexes.

Suivant le cas général de la Définition 1.2.1 une suite complexe est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto u_n$. On la note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.6.1. *On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .*

Proposition 1.6.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que $u_n = a_n + ib_n$, et si $\ell = a + ib$ avec a_n, b_n, a, b réels, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

Démonstration : Supposons $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Alors les inégalités

$$|a_n - a| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |b_n - b| \leq |u_n - \ell|$$

entraînent $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
Réciproquement supposons $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ alors l'identité

$$|u_n - \ell|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2$$

entraîne $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. ■

Alors (exercice) $\lim |u_n| = |\ell|$.
Hélas, ça ne marche pas toujours bien ; il faut parfois regarder la forme polaire.

Exemple. Suite géométrique : q^n où $q = re^{i\theta}$.
cas $|q| < 1$; $\lim_n q^n = 0$.
si $|q| > 1$; $|u_n| \to +\infty$.
Alors $\lim_n |u_n| = \rho^n = +\infty$. Si $\lim_n u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{C}$, comme $|z^n - \ell| \geq ||z^n| - |\ell|| = |\rho^n - |\ell||$, on obtient une contradiction. On en déduit que (u_n) ne converge pas dans $\mathbb{C}$.

si $|q| = 1$, $q = e^{i\theta}$. Si ça converge, le module aussi, donc $|\ell| = 1$ et $\ell \neq 0$. Comme $\lim q^{n+1} = \lim q^n$, on a $q = 1$.
Si $q = 1$, la suite est constante ; sinon $q = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ et $u_n = e^{in\theta}$ ne converge pas.

Définition 1.6.3. *On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
On dit qu'elle tend vers ∞ si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Remarque. Dans le plan complexe il n'y a pas de distinction $\pm\infty$.

Notation. On note $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Les Propositions 1.3.2 1.3.3 1.4.1 sont encore valables pour les suites complexes. Pour une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annule pas, la Proposition 1.5.4 se traduit en regardant les suites $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1/|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ en

$$\left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \infty\right).$$

Enfin les règles de calcul de limites complexes se résument dans les tableaux suivants :

$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n$?	$\ell \in \mathbb{C}$	$\ell = \infty$
$\ell' \in \mathbb{C}$	$\ell + \ell'$	∞
$\ell' = \infty$	∞	FI

$\lim_{n\to\infty} u_n v_n$?	$\ell \in \mathbb{C}^*$	$\ell = \infty$	$\ell = 0$
$\ell' \in \mathbb{C}^*$	$\ell\ell'$	∞	0
$\ell' = \infty$	∞	∞	FI
$\ell' = 0$	0	FI	0

1.7 Limites et fonctions continues.

Dans ce paragraphe I (ou J) désignera un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans le cas où I est borné, $\overline{I}$ désignera le plus petit intervalle fermé contenant I. Dans le cas d'une extrêmité infinie, on exclut cette extrêmité de $\overline{I}$ pour avoir toujours $\overline{I} \subset \mathbb{R}$. $\overline{I}$ est appelée adhérence de I dans $\mathbb{R}$ (voir cours de Topologie D05-E05).

Exemple. $\overline{[0,1[} = [0,1]$, $\overline{]-1,+\infty[} = [-1,+\infty[$.

1.7.1 Résumé de résultats du cours B01.

Définition 1.7.1. *(limites) Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.*

1. *Si $\ell \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$ si*
$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, (|x - \ell| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$
2. *Si $\ell \in I$, on a $\lim_{x\to\ell} f(x) = +\infty$ si*
$$\forall M > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, (|x - \ell| \leq \eta \Rightarrow f(x) > M).$$
3. *Si $\mathbb{L} \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si*
$$\forall\epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow f(x) > |f(x) - f(\ell)| < \epsilon).$$
4. *On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si*
$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Rightarrow f(x) > M).$$

On a des définitions analogues pour $-\infty$.

Définition 1.7.2. *(continuité) La fonction f est continue en un point x_0 de I si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$:*
$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, (|x - x_0| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon) .$$
Elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Retenir

$$(u_n \to \ell) \overset{f \text{ continue en } \ell}{\Rightarrow} (f(u_n) \to f(\ell)))\ .$$

La notion de fonction continue est en particulier facile à manipuler car elle se comporte bien avec les différentes opérations.

Proposition 1.7.3. *La somme, les combinaisons linéaires, le produit de deux fonctions continues sur I sont continus sur I. Le quotient de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est continu sur I. Si $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ est continue et si $g : J \to \mathbb{R}$ est continue alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.*

Exemple. Les polynômes, les fonctions exponentielles, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. Le logarithme est continu sur $\mathbb{R}_+^*$. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est continu sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque. On définit de la même façon la continuité de $I \to \mathbb{C}$, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et les propriétés restent valables. Par exemple $x \to x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

1.7.2 Avec les suites.

Proposition 1.7.4. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit (u_n) une suite de réels tels que $\lim_n u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

1. *Si $\ell \in I$ et si f est continue sur I, alors $\lim_n f(u_n) = f(\ell)$.*
2. *Plus généralement si $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$, où $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$, alors $\lim_n f(u_n) = L$.*

Démonstration : On regarde le premier cas. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x - \ell| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(\ell)| \leq \varepsilon)\ .$$

Pour un tel $\alpha > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha\,.$$

On a trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |f(u_n) - f(\ell)| \leq \varepsilon\,,$$

ce pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. ■

On peut aussi montrer une réciproque

Proposition 1.7.5. *Soit I un intervalle, $\ell \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Si pour* toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que $\lim_n u_n = \ell$, on a $\lim_n f(u_n) = f(\ell)$, alors la fonction f est continue en ℓ.*

Démonstration : Supposons que f n'est pas continue en $\ell \in I$. Nous allons construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)\,.$$

Tout d'abord, on remarque que la non continuité de f en $\ell \in I$, n'a de sens que quand l'intervalle I n'est pas réduit à un point. Cette non continuité en ℓ dit qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I$ tel que

$$|f(x_\alpha) - f(\ell)| > \varepsilon_0\,.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{n+1}$, il existe $u_n \in \left[\ell - \frac{1}{n+1}, \ell + \frac{1}{n+1}\right] \cap I$ telle que

$$|f(u_n) - f(\ell)| > \varepsilon_0\,.$$

On a trouvé une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ell)| > \varepsilon_0\,.$$

La suite image $(f(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(\ell)$. ■

1.7.3 Applications aux suites récurrentes.

Proposition 1.7.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ avec $f : I \to I$. La suite est alors bien définie. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in I$ et f est continue sur I alors on a $\ell = f(\ell)$.*

Démonstration : L'hypothèse $f : I \to I$ assure que la suite est bien définie. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, on peut passer à la limite dans chaque membre de l'égalité :

$$u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

■

Exemple. Suite de Heron. $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell})$ entraîne $\ell = \sqrt{a}$.

Exemple. $u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2}$, $u_0 > 0$. Limite possible $\ell = 1$. Arrive seulement si $u_0 = 1$.

Exemple. $2u_{n+1} = \sqrt{u_n}u_{n-1}^{3/2} + 1$, $u_0, u_1 > 0$. Les limites possibles sont $\ell = +1$.

Remarque. Quand on étudie une suite, considérer a priori les limites possibles est un bon réflexe. Attention à l'argument de continuité.

Exercice 1.11. $u_{n+1} = u_n^\alpha$ *avec* $u_0 > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.12. $f(x) = x/2 + 1/2$ *si* $x \in [0, 1[$ *et* $f(1) = 1/2$. *Etudier la suite récurrente* $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \in [0, 1]$.

Exercice 1.13. *Suite arithmético-géométrique (bis). On considère la suite récurrence $u_n = au_n + b$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer les (la) limites possibles. En notant ℓ une telle limite, établir la relation de récurrence pour $v_n = u_n - \ell$.*

1.8 Exercices.

Exercice 1.14. *Vérifier dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, l'inégalité*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

que l'on retient comme « la distance entre les distances est plus petite que la distance ».

Exercice 1.15. *Le maximum de 2 nombres* x, y *(c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté* $max(x, y)$*. De même on notera* $min(x, y)$ *le plus petit des 2 nombres* x, y*. Démontrer que :*

$$max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad et \quad min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $max(x, y, z)$*.*

Exercice 1.16. *Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de :* $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ *en posant* $u_n = 2^n$ *si* n *est pair et* $u_n = 2^{-n}$ *sinon.*

Exercice 1.17. *Montre qu'une suite réelle est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n \quad (resp.\ u_{n+1} > u_n)\,.$$

On fera une récurrence sur $m - n$ *pour comparer* u_m *et* u_n *avec* $m \geq n$ *.*

Exercice 1.18. *Laquelle de ces propositions est équivalente à* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon\,,\\
&\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon\,,\\
&\forall \varepsilon \geq 0, , \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Exercice 1.19. *Soit* A *une partie non vide bornée de* $\mathbb{R}$*. Montrer que* $b = \sup A$ *si et seulement si les deux conditions sont vérifiées*
– *b est un majorant de A ;*
– *il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* A *telle que* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ *.*
Que vaut $\sup([0, 1[\cap\mathbb{Q})$ *?*

Exercice 1.20. ***Unicité de la partie entière.*** *On rappelle que* $\mathbb{R}$ *est un corps archimédien. Pour* $r > 0$*, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N},\ n_x r \leq x < (n_x + 1)r\,.$$

Vérifier que pour $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *fixés, l'entier* n_x *est unique. En déduire que l'application partie entière* $E(x)$ *est bien définie.*

Exercice 1.21. *Soit* $x > 0$*, donner une expression simple de*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N \quad (N \in \mathbb{N})\,.$$

Exercice 1.22. *On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n..

Exercice 1.23. ***Suites arithmetico-géométriques*** *Il s'agit de généraliser l'exercice précédent. On considère pour a et $b \in \mathbb{R}$ la suite récurrente*

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad u_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On distinguera les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a \notin \{0,1\}$.)

Exercice 1.24. *On appelle image d'une suite l'ensemble de ses termes. Donner un exemple de deux suites différentes qui ont la même image. Construire une suite dont l'image est $\mathbf{Z}$. Existe-t-il une suite dont l'image est $]0,1[\cap\mathbf{Q}$?*

Exercice 1.25. *1) Expliquer pourquoi $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble de ses sous-suites est non dénombrable. (On se ramènera à l'étude des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Se faire guider pour l'argument diagonal.)

Exercice 1.26. ***Algorithme de Heron.*** *Pour $a > 0$ on considère la suite récurrente donnée par*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}), \quad u_0 > 0\,.$$

1) *Montrer que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que l'on a $u_n^2 \geq a$ pour $n \geq 1$.*

2) *Vérifier qu'elle est monotone à partir de $n = 1$ et bornée.*

2) *En déduire que la suite converge vers une limite $\ell_a \in \mathbb{R}$, telle que $\ell_a > 0$.*

3) *Montrer que l'on a $\ell_a = \sqrt{a}$.*

Exercice 1.27. 1) *Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

2) *En utilisant $r = \frac{1}{q}$ dans le caractère archimédien de $\mathbb{R}$, avec q arbitrairement grand, montrer que tout réel peut s'écrire comme limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

3) *En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$, montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.28. *Étudier la convergence des suites suivantes :*

$$u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + 2n + 1}, \qquad v_n = \frac{n^3 + \sin(\cos(n))}{n^3 + \cos(\sin(n))}$$

$$w_n = \frac{\sqrt{n} - n + 1}{1 + 3n} \qquad x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 1.29. *Étudier la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est premier} \\ 67 + 1/n & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si cette suite converge, montrer que sa limite est inférieure à 72*. Étudier la convergence de cette suite.*

Exercice 1.30. 1. *Montrer qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si les sous-suites* $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ *convergent et ont même limite.*

2. *Montrer qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si les sous-suites* $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ *convergent.*

On notera que dans le deuxième cas aucune allusion n'est faite à l'égalité des limites.

Exercice 1.31. *Étudier la convergence des suites :*

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n} + (-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right).$$

Exercice 1.32. *Etudier la convergence de la suite* $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 1.33. *Soit* q *un entier au moins égal à* 2*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $u_n = \cos\dfrac{2n\pi}{q}$.

1. *montrer que* $u_{n+q} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. *Calculer* u_{nq} *et* u_{nq+1}*. En déduire que la suite* u_n *n'a pas de limite.*

Exercice 1.34. *Déterminer les limites lorsque* n *tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.*

1. $1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \ldots\ ;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ ;\ \ldots$
2. $2/1\ ;\ 4/3\ ;\ 6/5\ ;\ \ldots\ ;\ 2n/(2n-1)\ ;\ \ldots$
3. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \ldots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$ *puis* $\sqrt{2}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ...
10. $\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. *Démontrer la formule* $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ *; en déduire* $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Exercice 1.35. ***Moyenne de Cesaro :*** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que la suite donnée par* $y_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ *converge vers* ℓ.
2. *Donner un exemple pour lequel la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge mais pas la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. *Plus généralement si* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels strictement positifs telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$, *montrer que la suite donnée par* $z_n = \frac{c_1x_1+\cdots+c_nx_n}{c_1+\cdots+c_n}$ *converge vers* ℓ.

Exercice 1.36. *Étudier la suite* $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, *a et b étant donnés dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.37. *Construire une suite* $u_n = v_nw_n$ *(resp.* v_n+w_n*) convergente et telle que l'une au moins des suites* (v_n) *et* (w_n) *diverge.*

Exercice 1.38. *Encadrer la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$. *Que peut-on en déduire ?*

Exercice 1.39.
1. *Que peut-on dire d'une suite qui vérifie* $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$ *?*
2. *Que peut-on dire d'une suite qui vérifie* $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$ *?*
3. *Que peut-on dire d'une suite qui vérifie* $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$ *?*

Exercice 1.40. *Quelles sont les limites possibles des suites suivantes dans* $\overline{\mathbb{C}}$ *:*

$$u_{n+1} = \frac{u_n-2}{u_n+4}\,, \quad v_{n+1} = \frac{v_n+2}{v_n+1}\,, \quad w_{n+1} = \frac{-1}{w_n+1}\,.$$

On supposera ces suites bien définies.

Exercice 1.41. ***Suites homographiques .*** *On se place dans* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. *On se donne quatre nombres complexes* $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ *tels que* $ad-bc\neq 0$ *et* $c\neq 0$. *On considère la suite de* $\overline{\mathbb{C}}$ *définie par*

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{au_n+b}{cu_n+d} & si \quad u_n \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\,, \\ \infty & si \quad u_n = -\frac{d}{c}\,, \\ \frac{a}{c} & si \quad u_n = \infty\,. \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable E, tel que $u_0 \notin E$ entraîne $u_n \in \mathbb{C}$ (i.e. $u_n \neq \infty$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Montrer qu'avec l'hypothèse $c \neq 0$, on ne peut avoir $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.*
3. *Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$?*
4. *On se place dans un cas où il y a deux limites possibles, ℓ_1 et $\ell_2 \neq \ell_1$. Traduire cette condition en une condition sur (a, d, b, c). Vérifier que la suite $v_n = \frac{u_n-\ell_1}{u_n-\ell_2}$ est géométrique.*
5. *Dans le cas où $\ell_1 = \ell_2$, montrer que l'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n-\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmético-géométrique.*
6. *Reprendre les exemples de l'exercice ci-dessus et conclure au sujet de la convergence.*

Exercice 1.42. ***Suites de Fibonacci*** *On considère les suites réelles données par*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,, \quad u_0, u_1 \in \mathbb{R}\,.$$

1. *Montrer qu'il existe deux nombres $\lambda_\pm$ tels qu'en prenant $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 = \lambda_\pm u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Vérifier que l'un de ces nombres est le nombre d'or*

$$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   et que l'autre est négatif.
2. *Vérifier que le système*

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & u_0 \\ \alpha\lambda_+ + \beta\lambda_- & = & u_1\,. \end{cases}$$

   admet une unique solution.
3. *Vérifier par récurrence que la solution du système ci-dessus permet d'écrire*

$$u_n = \alpha\lambda_+^n + \beta\lambda_-^n\,.$$

4. *Conclure sur la convergence de la suite en fonction des données u_0 et u_1.*
5. *En considérant un rectangle de côté u_n et u_{n+1} et un carré côté u_{n+1}, expliquer la fascination des artistes et architectes pour le nombre d'or depuis l'antiquité.*

Exercice 1.43. ***Double récurrence linéaire :*** *On considère une suite donnée par*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad , u_0, u_1 \in \mathbb{C}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}^*$.

1. *Montrer qu'il existe au plus deux complexes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels qu'en prenant $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_1 = \lambda_{1,2}u_0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.*

2. *En supposant $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donner une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, λ_1, λ_2 et de la solution $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ du système*

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & u_0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 & = & u_1\,, \end{cases}$$

dont on vérifiera l'unicité.

3. *Dans le cas où $\lambda_2 = \lambda_1$, vérifier que les suites $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence. Exprimer toute suite vérifiant cette relation de récurrence en fonction de ces deux suites.*

Exercice 1.44. *On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

avec $u_0, v_0 > 0$. Montrer que les deux suites sont définies, monotones à partir de $n \geq 1$ et adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite.

Exercice 1.45. *On donne la suite (u_n) définie par :*

$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

1. *Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.*
2. *Si la suite converge, quelle peut être sa limite.*
3. *Vérifier la relation*

$$u_{n+2} - u_n = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{\sqrt{2 - u_{n+1}} + \sqrt{2 - u_{n-1}}}\,.$$

4. *En déduire que les deux suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
5. *Représenter le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{2-x}$ et la diagonale $y = x$ pour $x \in [0, 2]$, ainsi que les première valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_6$.*

Exercice 1.46. *Étudier les suites :*

1. $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 1.47. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ pour $n \geq 0$.*

1. *Étudier cette suite si $a = 0$.*
2. *Étudier cette suite si $a = -10$.*
3. *Étudier cette suite si $a = 3$.*

4. *Généraliser en discutant selon la valeur de a. Indication : Tracer le graphe de la fonction $f(x) = e^x - 2$ et la diagonale $y = x$.*

Exercice 1.48. *Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,*

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.49. *Sur une planète lointaine, vous pouvez placer de l'argent à un taux d'intérêt de 100% par an. Donc si vous placez 1 euro, vous repartez avec 2 euros au bout d'un an. En plus, vous pouvez retirer votre argent à tout moment, avec les intérêts correspondants, puis le placer à nouveau. Par exemple, si vous placez 1 euro pendant une demi-année, vous obtenez 1.5 euros, que vous placez une autre demi-année pour obtenir finalement 2.25 euros. À partir d'un euro, quelle somme pouvez-vous obtenir en un an ? (Indication on utilisera l'encadrement $u - u^2/2 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable pour $u > 0$.)*

Exercice 1.50. *On considère les deux suites :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 1.51. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Exercice 1.52. *Étudier la suite définie par récurrence :*

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 1.53. *Soit x un réel.*

1. *Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$.*
2. *Retrouver la densit de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.54. *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calculer ℓ.*

Exercice 1.55. *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \phi(n) = +\infty$.*

1.9 Problème : Ecriture décimale des réels.

L'objectif de ce problème est de montrer que l'on décrit bien l'ensemble de tous les réels à l'aide de l'écriture décimale.

1) Rappeler la définition axiomatique de l'ensemble des réel $\mathbb{R}$.

2) Rappeler la définition de la partie entière d'un réel x, notée $E(x)$.

3) Calculer $\sum_{k=1}^{N} 9 \times 10^{-k}$ et sa limite quand $N \to \infty$. En déduire qu'il n'y a pas unicité de l'écriture décimale si on ne prend pas certaines précautions.

Dans une des définitions qui suit on exclut les écritures décimales qui se terminent par une suite de 9.

On considère les ensembles de suites d'entiers

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \big\{(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ c_0 \in \mathbb{N},\ c_k \in \{0,1,\ldots,9\} \text{ pour } k \geq 1\big\} \\ \mathcal{E}_0 &= \{(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E},\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N, c_k \neq 9\}\ . \end{aligned}$$

4) Pour une suite $C = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$, on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{-k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{-k} + 10^{-n}\,.$$

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que l'on définit une application $F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ en posant $F(C) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{-k}$.

5) Surjectivité de F

a) A un réel $x \in \mathbb{R}_+$ on associe la suite de rationnels (en fait nombres décimaux) donnée par $x_k = 10^{-k}E(10^k x)$ puis on pose $c_0 = x_0$ et $c_k = 10^k(x_k - x_{k-1})$. Vérifier que la suite $C = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$ et que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la question 4). En déduire que l'on a $x = F(C)$.

b) Vérifier par l'absurde que la suite C définie au a) qui vérifie $x = F(C)$ est nécessairement dans $\mathcal{E}_0$.

c) Conclure sur la surjectivité de $F : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{R}_+$

6) Injectivité de F

a) Montrer que pour $C \in \mathcal{E}_0$, on a $E(10^{n_0}F(C)) = \sum_{k=0}^{n_0} c_k 10^{n_0-k}$.

b) En déduire que pour deux éléments distincts C^1 et C^2 de $\mathcal{E}_0$, on a $F(C^1) \neq F(C^2)$ (On prendra pour n_0 le plus petit entier tel que $c^2_{n_0} \neq c^1_{n_0}$.)

b) En déduire que l'application $F : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{R}_+$ est bijective.

c) A-t-on l'injectivité sur $\mathcal{E}$?

7) Retrouver la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

8) Ecriture décimale des rationnels.

a) Montrer que si la suite $C = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang alors $F(C)$ est rationnel.

b) Vérifier que pour un entier $q \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver deux entiers distincts $k_1 \neq k_2$ tel que $10^{k_1} = 10^{k_2} \mod (q)$.

c) En déduire que si $x = p/q \in \mathbb{Q}_+$ alors la suite $C \in \mathcal{E}_0$, telle que $F(C) = p/q$, est périodique.

9) Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$:

a) Par un argument diagonal montrer que $\{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable (Considérer $\varphi(n) = f_n(n) + 1 \mod (10)$).

b) Vérifier que $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$ est dénombrable.

c) En déduire que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

10) Bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

a) Adapter la définition de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}_0$ à l'écriture en base 2. En déduire que l'intervale $]0, 1[$ est en bijection bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.

b) Rappeler pourquoi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.

c) Vérifier que $x \to \frac{2x-1}{x(x-1)}$ définit une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

11) Question subsidiaire : Y a-t-il des ensembles de cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$?

Chapitre 2

Calcul de primitive.

On travaille sur un intervalle $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en général. Les situations particulières seront précisées.

2.1 Dérivées.

Nous faisons un rapide résumé du cours B01. Les résultats peuvent être admis pour ceux qui n'ont pas suivi ce cours.

2.1.1 Définition et résultats importants.

Définition 2.1.1. *On dit qu'une fonction f définie sur I est dérivable en $x \in I$ si la limite*

$$\lim_{\substack{x' \in I \setminus \{x\} \\ x' \to x}} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{\substack{x+h \in I \setminus \{x\} \\ h \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. On la note alors $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}(x)$. On dit que f est dérivable sur tout I si elle est dérivable en tout point de I.

Interprétation graphique : La dérivée comme limite d'un taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la (droite) tangente au graphe, ou encore comme un taux d'accroissement instantané.

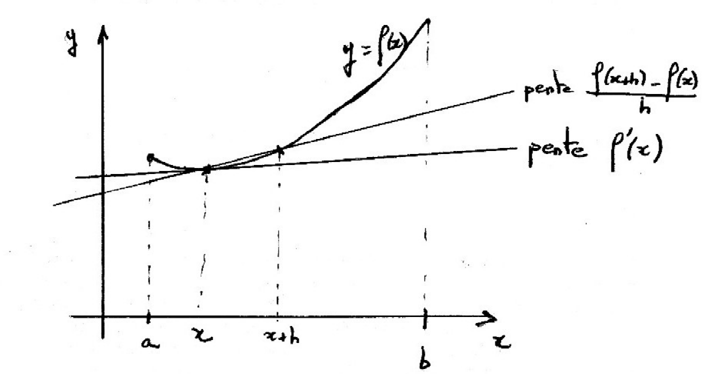
Proposition 2.1.2. *Une combinaison linéaire, le produit, le quotient quand il est défini et la composée de deux fonctions dérivables sont dérivables. On a de plus les formules*

$$(\lambda U + \mu V)' = \lambda U' + \mu V' \tag{2.1}$$

$$(UV)' = U'V + UV' \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \tag{2.3}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x), . \tag{2.4}$$



Et pour l'application réciproque (quand elle est définie) on a

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ de dérivée non nulle.

Remarque. Les formules (2.1) et (2.3) sont encore valables pour $U, V : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$ et (2.4) est encore valable pour $f : \mathbb{R} \supset I \to I' \subset \mathbb{R}$ et $g : I' \to \mathbb{C}$.

Proposition 2.1.3. *Théorème des accroissements finis. Si f est continue sur $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)\,.$$

On déduit alors

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)|\,|b-a|\ .$$

Cette inégalité est en particulier intéressante pour les fonctions continûment dérivables (f et f' continues sur $[a,b]$). Combiné avec le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes (voir cours B01 et C01), cela donne.

Corollaire 2.1.4. *Inégalité des accroissements finis. Pour une fonction continûment dérivable sur un intervalle $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, on a*

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(y) - f(x)| \leq M_1\,|b-a|$$

avec $M_1 = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

Corollaire 2.1.5. *Si f est une fonction dérivable dans un intervalle I, on a l'équivalence*

$$(f = Cte) \Leftrightarrow (f' \equiv 0)\ .$$

On rappelle enfin que la dérivée est utile pour rechercher les extrêma locaux d'une fonction.

Proposition 2.1.6. *Les extrêma locaux d'une fonction dérivable se trouvant à l'intérieur d'un intervalle (i.e. en on exclut les extrêmités de I) vérifient $f'(x_{ext}) = 0$.*

N.B. La réciproque est fausse. Exemple : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

2.1.2 Quelques dérivées classiques.

I	$f(t)$	$f'(t)$
$\mathbb{R}$	t^n	nt^{n-1}
$]0,+\infty[$	$t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\ln\|t\|$	$\frac{1}{t}$
$\mathbb{R}$	$\exp(\alpha t), \alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	$\alpha \exp(\alpha t)$
$\mathbb{R}$	$\cos t$	$-\sin t$
$\mathbb{R}$	$\sin t$	$\cos t$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$
$\mathbb{R}$	$\cosh t$	$\sinh t$
$\mathbb{R}$	$\sinh t$	$\cosh t$

2.2 Primitive

2.2.1 Définition et premières propriétés.

Définition 2.2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur I avec*

$$F' \equiv f\,.$$

Proposition 2.2.2. *Soit F et G deux primitives de f définies sur un intervalle I. Alors il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + K\,.$$

Démonstration : Sur I on a l'identité $(F-G)' = 0$. Comme I est un intervalle, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + K\,.$$

■

Remarque.

1. Autrement dit, sur un intervalle, une primitive est unique à une constante près. On dit parfois « la » primitive de f sans perdre de vue qu'il y a une détermination à une constante près. « une » primitive est plus correct.
2. Attention la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2 & \text{si } x > 0 \\ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ qui ne diffère pas de $\frac{1}{x}$ par une constante. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Corollaire 2.2.3. *Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ fixés, il existe au plus une primitive F telle que*

$$F(x_0) = \lambda\,.$$

Notation. Primitive de f telle que $F(x_0) = 0$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\; dt\,.$$

Primitive de f à une constante près

$$F(x) = \int^{x} f(t)\; dt\; (+K) \quad \text{ou} \quad F = \int f(t)\; dt\; (+K)\,.$$

Proposition et Définition 2.2.4. *Si f admet une primitive sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F, on l'appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on la note*

$$\int_a^b f(t)\; dt = F(b) - F(a)\,.$$

Démonstration : Il suffit de voir que la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F (i.e. de la constante) . ■

Proposition 2.2.5. *Si f admet une primitive sur I et a, b, c sont trois points de I, l'intégrale de f vérifie la relation de Chasles*

$$\int_a^c f(t)\; dt = \int_a^b f(t)\; dt + \int_b^c f(t)\; dt\,.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire $F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$. ■

Remarque. En particulier $\int_b^a f(t)\; dt = -\int_a^b f(t)\; dt$.

Proposition 2.2.6. *Si f admet une primitive sur $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\int_a^b f(t)\; dt = f(c)(b - a)\,.$$

Démonstration : C'est le théorème des accroissements finis appliqué à F . ■

Corollaire 2.2.7. *Pour $-\infty < a \leq b < +\infty$, f et g deux fonctions admettant une primitive sur $[a, b]$ et telle que $f \leq g$, on a*

$$\int_a^b f(t)\; dt \leq \int_a^b g(t)\; dt\,.$$

2.2.2 Interprétation graphique.

Plaçons nous dans le cas d'un intervalle $I = [a, b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$. On subdivise l'intervalle I en N intervalles suivant $x_k = a + \frac{k}{N}(b-a)$, $0 \leq k \leq N$. A l'aide du théorème des accroissement finis, on écrit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \sum_{k=0}^{N-1} F(x_{k+1})-F(x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} F'(c_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k)\,,$$

avec pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$. On a encore

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(c_k) - f(x_k)\,.$$

Deux cas sont intéressants

– f est une fonction croissante (ou encore monotone). On a alors

$$f(c_k) - f(x_k) \leq f(x_{k+1}) - f(x_k)\,,$$

d'où l'on déduit

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{N-1} f(t)\ dt + \frac{b-a}{N}[f(b) - f(a)]\,.$$

Remarque. On peut montrer qu'une fonction monotone qui admet une primitive est forcément continue.

– $\lim_N \omega(1/N) = 0$ en posant

$$\omega(\frac{1}{N}) = \sup_{|x-x'|\leq 1/N} |f(x') - f(x)|\ .$$

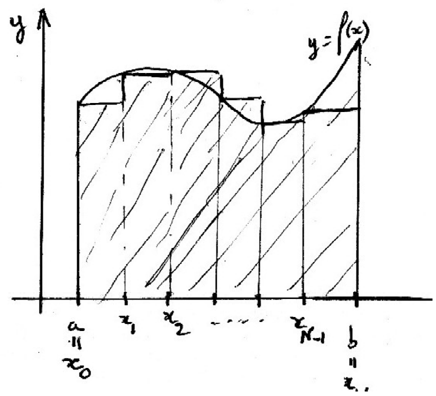
Remarque. Quand f est dérivable et que cette dérivée est bornée sur $]a, b[$, on a $\omega(1/N) \leq C/N$ par l'inégalité des accroissements finis. Quand f est continue , le théorème de Heine [1] donne $\lim_{N\to\infty} \omega(1/N) = 0$.

Dans ce cas on a

$$\frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f(c_k) - f(x_k)| \leq (b-a)\omega(1/N) \overset{N\to\infty}{\to} 0\,.$$

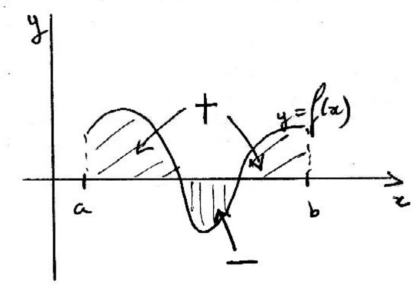
Dans les deux cas, on obtient

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)\,.$$



Mais si f est une fonction positive ou nulle sur I, $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ désigne l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$. A la limite $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt$ vaut l'aire de la surface comprise entre $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses $y = 0$ et le graphe de f, $y = f(x)$.

- Cela donne une méthode pour construire la primitive, de toute fonction continue (ou même toute fonction qui est la somme de deux fonctions monotones). Intégrale de Riemann.
- Quand f n'a pas de signe, $\int_a^b f(t)\, dt$ est une somme d'aires signées.



Théorème 2.2.8. *(admis.* [2]*) Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.*

Vocabulaire

- Quand on sait définir l'intégrale d'une fonction f un intervalle $[a, b]$, on dit que la fonction est intégrable. Notre définition dit que toute fonction qui admet une primitive est intégrable. En fait on peut définir des intégrales de façon plus générale en s'appuyant sur l'intérprétation graphique du calcul d'aire. Ainsi l'intégrale de Riemann permet de définir l'intégrale pour des fonctions monotones discontinues qui n'admettent pas de primitive. L'intégrale de Lebesgue est encore plus générale et permet de définir

[1]voir cours C01 ou le cours de Topologie D05-E05

[2]Voir cours C01

l'intégrale de la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels. Pour chacune de ces théories on dit intégrable au sens de Riemann ou intégrable au sens de Lebesgue. Pour les fonctions continues sur un intervalle borné, ces notions coincident avec le fait d'admettre une primitive.

– Si f admet une primitive sur $[a, +\infty)$ telle que $\lim_{x\to\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt = L - F(a)\,.$$

Le membre de droite où une des bornes de l'intégrale est infinie est appelé intégrale impropre.

– Les sommes de la forme $\sum_{k=0}^{N-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k)$ avec $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ sont appelées sommes de Riemann.

2.3 Calcul de primitives.

2.3.1 Primitives de base

Connaître les dérivées classiques permet de connaître des primitives dites classiques.

I	$f(t)$	$F(t)$
$\mathbb{R}$	$t^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + K$
$]0, +\infty[$	$t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{t}$	$\ln(\lvert t\rvert) + K$
$\mathbb{R}$	$\exp t$	$\exp t + K$
$\mathbb{R}$	$\cos t$	$\sin t + K$
$\mathbb{R}$	$\sin t$	$-\cos t + K$
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$	$\tan t + K$
$\mathbb{R}$	$\cosh t$	$\sinh t + K$
$\mathbb{R}$	$\sinh t$	$\cosh t + K$

2.3.2 Linéarité.

La linéarité de la dérivation conduit à

$$\int_a^x \lambda f(t) + g(t)\, dt = \lambda \int_a^x f(t)\, dt + \int_a^x g(t)\, dt\,.$$

Remarquons que si on ne précise pas les bornes, cette égalité est valable modulo une constante :

$$\int^x \lambda f(t) + g(t)\, dt = \lambda \int^x f(t)\, dt + \int^x g(t)\, dt(+K)\,.$$

Remarque. Quand il y a indétermination de la constante des deux côtés de l'égalité comme ci-dessus, il n'est pas nécessaire d'écrire $+K$. Il suffit de bien garder à l'esprit ce que signifie la notation $\int^x$.

Exemple. La primitive d'un polynôme

$$\int^x \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + K\,.$$

On définit l'intégrale d'une fonction complexe par linéarité. $f + ig : I \to \mathbb{C}$

$$\int_a^x f(t) + ig(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + i\int_a^x g(t)\ dt\,.$$

Exemple.

$$\mathbb{R}e \int^x e^{it}\ dt = \frac{1}{2}\left(\int^x e^{it}\ dt + \overline{\int^x e^{it}\ dt}\right) = \int^x \cos t\ dt\,.$$

2.3.3 Intégration par parties.

La règle de dérivation du produit FG, où F et G sont des primitives de f et g conduit à

$$\int_a^x f(t)G(t)\ dt = F(x)G(x) - F(a)G(a) - \int_a^x F(t)g(t)\ dt$$

qui se résume en

$$\int_a^x U'V = [UV]_a^x - \int_a^x UV'\,.$$

Exemple. Primitive de te^t.

$$\int_0^x te^t\ dt \overset{V=t,U=e^t}{=} \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\ dt = xe^x - (e^x - 1)\,.$$

On obtient $\int^x te^t\ dt = e^x(x-1) + K$.
Plus généralement on peut calculer par intégration par parties des primitives de $P(t)e^t$ où P est un polynôme, ou $P(t)\cos t$ ou $P(t)\sin t$.

Exemple. Primitive de $\ln t$

$$\int_1^x \ln t\ dt = \int_1^x 1 \times \ln t\ dt \overset{V=\ln t,U=t}{=} [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\ dt = x\ln x - (x-1)$$

$$\int^x \ln t\ dt = x\,(\ln x - 1) + K\,.$$

2.3.4 Changement de variable.

La formule de dérivation pour $G \circ u$ où G est une primitive de g permet de trouver une primitive de $g \circ u \times u'$

$$\int_a^x g\,[u(t)]\,u'(t)\ dt = \int_a^x (G \circ u)'\,(t)\ dt = G\,[u(x)] - G\,[u(a)]\ .$$

Autre écriture

$$\int_a^x g\,[\mathbf{u}(t)]\ \ d\,[\mathbf{u}(t)] = \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(x)} g(u)\ du\,,$$

avec la convention $d[\mathbf{u}(t)] = \mathbf{u}'(t)\ dt$ cohérente avec la notation $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}'(t)$. Dans la deuxième intégrale, le u apparaissant dans $g(u)\ du$ doit être considéré comme une variable, les bornes sont changées en $\mathbf{u}(a)$ et $\mathbf{u}(b)$ où $\mathbf{u}$ est la fonction $t \mapsto \mathbf{u}(t)$. En pratique on n'utilise pas de caractère gras.

Exemple. On retrouve par exemple $\int^x e^{\alpha t}\ dt = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + K$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ avec

$$\int_0^x e^{\alpha t}\ dt = \int_0^x e^{\alpha t}\frac{d\alpha t}{\alpha} \overset{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha x} e^u\ du = \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}\,.$$

Ecrire à part

$$u = \alpha t, \quad du = \alpha\ dt, \quad t = \frac{u}{\alpha}, \quad dt = \frac{du}{\alpha}\,.$$

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$ et $x > a$ on a

$$\int^x (t-a)^\alpha\ dt \overset{u=t-a}{=} \int^{x-a} u^\alpha\ du = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$$

Exemple.

$$\int^x \frac{2t}{t^2+1}\ dt \overset{u=t^2}{=} \int^{x^2} \frac{du}{2(1+u)} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K\,.$$

$$\big(u = t^2, \quad du = 2t\ dt\,.\big)$$

Exemple. Primitive de $1/(1+t^2)$

$$\int^x \frac{dt}{1+t^2} \overset{\substack{t=\tan u\\ u=\arctan t}}{=} \int^{\arctan x} du = \arctan x + K\,.$$

$$\left(u = \arctan t, \quad t = \tan u, \quad dt = (1+\tan^2 u)\ du, \quad \frac{dt}{1+t^2} = du\,.\right)$$

2.3.5 Fractions rationnelles

Méthode d'intégration.

C'est à dire $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{P(t)}{(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_m)^{k_m}}$ avec $t_i \in \mathbb{C}$.
Première étape : diminuer le degré du numérateur en faisant la division euclidienne de P par Q :

$$
\begin{aligned}
P(t) &= A(t)Q(t) + R(t), \quad d^\circ R < d^\circ Q \\
f(t) &= A(t) + \frac{R(t)}{Q(t)} \quad A \text{ polynôme}.
\end{aligned}
$$

Rappel : La division euclidienne des polynômes se fait comme la division euclidienne (c'est à dire avec reste) des entiers. Il suffit de remplacer 10^k par t^k. Dans la suite on suppose donc

$$d^\circ P < d^\circ Q = k_1 + k_2 + \cdots + k_m .$$

Deuxième étape : Un théorème assure que toute fraction rationnelle se décompose en une somme d'éléments simples[3] (ici avec $d^\circ P < d^\circ Q$, $A = 0$) :
- dans $\mathbb{C}$,

$$\frac{P(t)}{(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_m)^{k_m}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(t-t_i)^j} .$$

- dans $\mathbb{R}$, on regroupe les termes conjugués de la décomposition dans le complexe pour avoir une combinaison linéaire de termes de la forme $\frac{a}{(t-\alpha)^j}$ ou $\frac{at+b}{((t-\alpha)^2+\beta^2)^n}$, avec $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Troisième étape : On intègre terme à terme. Les polynômes ne posent pas de problème. de même : $\int^x \frac{a}{(t-\alpha)^n}\,dt = \frac{-a}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$ si $n \neq 1$ et $\int^x \frac{a}{(t-\alpha)}\,dt = a\ln|x-\alpha|$.
pour $\frac{at+b}{((t-\alpha)^2+\beta^2)^n}$, on commence par faire apparaître la dérivée de $(t-a)^2+b^2$ au numérateur en écrivant $at+b = \frac{a}{2}(2(t-\alpha)) + ...$ La première primitive est facile à calculer, elle se ramène à une forme $\int \frac{1}{u^n}\,du$. Il reste des termes de la forme $\int^x \frac{c}{((t-\alpha)^2+\beta^2)^n}\,dt$. En faisant un changement de variable $u = \frac{(t-\alpha)}{\beta}$, on se ramène à $F_n = \int \frac{du}{(1+u^2)^n}$.
On a $F_1(x) = \arctan x$, puis F_n se calcule par récurrence en utilisant une intégration par parties.

Pratique de la décomposition en éléments simples.

On travaille d'abord dans le complexe (voir Deuxième étape).
- Si le dénominateur n'est pas trop gros on peut identifier les coefficients a_{ij} en mettant l'expression $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(t-t_i)^j}$ au même dénominateur.

[3]voir cours B05

Exemple. $f(t) = \frac{t}{t^2-1}$. A partir de

$$f(t) = \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{a_1}{t-1} + \frac{a_2}{t+1} = \frac{(a_1+a_2)t + (a_1 - a_2)}{(t^2-1)}\,,$$

on écrit $a_1 + a_2 = 1$ et $a_1 - a_2 = 0$. D'où

$$f(t) = \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \quad \text{et} \quad \int^x \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln(t^2-1) + K\,.$$

– Méthode générale pour trouver les coefficients a_{ij}. Une fois que $d^0 P < \sum_{i=1}^m k_i$, poser $P_1(y) = P(y+t_1)$ et $Q_1(y) = Q(y+t_1)/y^{k_1}$. Faire la division suivant les puissances croissantes de P_1 par Q_1 jusqu'à l'ordre k_1 pour obtenir

$$P_1(y) = \left[\sum_{j=1}^{k_1} \frac{a_{1j}}{y}^{k_1 - j}\right] Q_1(y) + y^{k_1} R_1(y)\,.$$

On en déduit

$$f(t) = \frac{P_1(t-t_1)}{Q(t-t_1)} = \sum_{j=1}^{k_1} \frac{a_{1j}}{(t-t_1)^j} + \frac{R_1(t-t_1)}{Q_1(t-t_1)}\,,$$

où $Q_1(t-t_1) = (t-t_2)^{k_2} \ldots (t-t_m)^{k_m}$ et $d^0 R_1(t-t_1) < \sum_{i=2}^m k_i$. On peut donc recommencer avec $R_1(t-t_1)$ et $Q_1(t-t_1)$ en isolant le facteur $(t-t_2)^{k_2} \ldots$ et ainsi de suite.

Exemple. $f(t) = \frac{1}{(t-1)^3(t^2+t+1)}$
On a $P(t) = 3$, $Q(t) = (t-1)^3(t^2+t+1)$. On travaille avec $t_1 = 1$ et on pose donc $P_1(y) = 3$ et $Q_1(y) = ((y+1)^2 + (y+1) + 1) = y^2 + 3y + 3$. La division suivant les puissances croissantes se fait comme une division (en écrivant les polynômes suivant les puissances croissantes). On obtient donc

$$\begin{array}{llll|l}
3 & & & & 3 + 3y + y^2 \\ \cline{5-5}
0 & -3y & -y^2 & & 1 - y + \frac{2}{3}y^2 \\
 & 0 & +2y^2 & +y^3 & \\
 & & & -y^3 - \frac{2}{3}y^4 &
\end{array}$$

$$3 = P_1(y) = \left(1 - y + \frac{2}{3}y^2\right) Q_1(y) - y^3(1 + \frac{2}{3}y)\,.$$

En prenant $t = y - 1$ et en divisant par $Q(t) = (t-1)^3 Q_1(t-1)$, on obtient

$$f(t) = \frac{1}{(t-1)^3} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{2}{3(t-1)} - \frac{1 + 2/3(t-1)}{t^2+t+1}\,.$$

2.3.6 Fractions rationnelles en e^t

On pose $u = e^t$. On se ramène à une fraction rationnelle en u. Même chose pour une fraction rationnelle en $e^{\alpha t}$

2.3.7 Fractions rationnelles en $\cos t$ et $\sin t$

Un polynôme $P(x, y)$ en x et y est une combinaison linéaire de monômes $x^m y^n$. Alors, $P(\cos t, \sin t)$ est appelé un polynôme trigonométrique ; c'est une combinaison linéaire de $\cos^m x \sin^n x$ Si m (respectivement n) est impair, on pose $u = \sin x$ (respectivement $u = \cos x$) et on utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Si m et n sont pairs, on linéarise. Cette dernière méthode marche à tous les coups. Il s'agit d'écrire

$$\cos t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) ,$$

d'utiliser ensuite la formule du binôme $(a + b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N-k}$ pour calculer $\cos^m t \sin^n t$ (en remarquant $\cos^m t \sin^n t = \mathbb{R}e\,(\cos^m t \sin^n t)$).

Une fraction rationnelle $R(x, y)$ est un quotient de deux polynômes $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.
Alors $R(\cos t, \sin t)$ est appelé fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$.
Méthode qui marche à tous les coups : Pour $t \in]-\pi, \pi[$, le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, ramène le problème à celui d'une primitive de fraction rationnelle en u. ($du = \frac{1}{2}(1 + u^2)dt,$, $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin t = \frac{2u}{1+u^2}$).
Trucs : Les trucs suivants conduisent à des fractions rationnelles moins complexes que le changement de variable précédent : Si l'expression $f(t)dt$ a la symétrie du cosinus (inchangé par $t \to -t$) on pose $u = \cos(t)$. Respectivement si $f(t)\ dt$ a la symmétrie du sinus, $t \to \pi - t$, (resp. de la tangente, $t \to t + \pi$), on pose $u = \sin t$ (resp. $u = \tan t$) .

Exemple. $f(t) = \cos^2 t \sin t$, $f(-t)\ d(-t) = f(t)\ dt$

$$\int^x \cos^2(t) \sin t\ dt \overset{u=\cos t}{=} -\int^{\cos x} u^2 du = -\frac{1}{3} \cos^3 x + K .$$

Exemple. $f(t) = \cos^3 t$

$$\begin{aligned}
\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{K} C_n^k e^{ikt-(3-k)t} \\
&= \frac{1}{8}e^{-i3t} + \frac{3}{8}e^{-it} + \frac{3}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{i3t} \\
&= \mathbb{R}e\left[\frac{1}{8}e^{-i3t} + \frac{3}{8}e^{-it} + \frac{3}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{i3t}\right] \\
&= \frac{1}{8}\cos(-3t) + \frac{3}{8}\cos(-t) + \frac{3}{8}\cos(t) + \frac{1}{8}\cos(3t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit $\int^x \cos^3 t\ dt = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + K$.

Exemple. $f(t) = \frac{1}{\sin t}$. $u = \tan(t/2)$, $du = \frac{1+u^2}{2}dt$, $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$.

$$\int^x \frac{dt}{\sin t} \overset{u=\tan(t/2)}{=} \int^{\tan(x/2)} \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2} = \ln\left|\tan(\frac{x}{2})\right| + K\,.$$

2.3.8 Fractions rationnelles en t et $(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{m}}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Prendre la variable $u = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{m}}$.
Exemple. $f(t) = t\sqrt[3]{t-1}$. $u^3 = t-1$, $3u^2du = dt$.

$$\int^x t\sqrt[3]{t-1}\ dt \overset{u=\sqrt[3]{t-1}}{=} \int^{\sqrt[3]{x-1}} (u^3+1)u3u^2\ du = \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + K\,.$$

2.3.9 Fractions rationnelles en t et $\sqrt{at^2+bt+c}$

On met at^2+bt+c sous forme canonique $(a(t+\alpha)^2+\beta^2)$. Après changement de variable affine, on se ramène à une forme $\sqrt{1+t^2}$ ou $\sqrt{t^2-1}$
Forme $\sqrt{1-t^2}$. Il faut $t \in [-1,1]$. L'application $u \mapsto \sin u$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]-1,1[$. On pose $t = \sin u$, $u = \arcsin t$.
Forme $\sqrt{1+t^2}$. On pose $t = \sinh u$.
Forme $\sqrt{t^2-1}$. On pose $t = \cosh u$.
Exemple. Surface d'un disque. $f(t) = \sqrt{R^2-t^2}$, $t \in [-R,R]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}\ dt \overset{t=Ru}{=} R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2du} \overset{u=\cos s}{=} -R^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 s\ ds \\
= R^2\int_{\pi}^{0}\frac{\cos(2t)-1}{2}\ dt = \frac{\pi R^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

L'intégrale donne la surface du demi-disque. La surface du disque est πR^2.

2.3.10 Vérifier à la fin.

Une fois que l'on a utilisé une méthode pour trouver une primitive F de f,

$$\text{Vérifier } F' = f.$$

Encore plus rapide f paire (resp. impaire) et $F(0) = 0$ entraîne que F est impaire (resp. paire). f périodique et $\int_0^T f(t)\ dt = 0$ entraîne F est périodique (Attention faux sinon. Exemple $\sin^2(t)$) .

2.3.11 Primitives à connaître ou à savoir retrouver rapidement.

En plus des primitives de base, il est bon de connaître les primitives suivantes (les intervalles de définition ne sont pas précisés) :

$$\int^x t^\alpha\ dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int^x \frac{dt}{t} = \ln|x| + K$$

$$\int^x \ln t\ dt = x(\ln x - 1) + K \quad (x > 0)$$

$$\int^x \cos t\ dt = \sin x + K \qquad \int^x \sin t\ dt = -\cos x + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan x + K \qquad \int^x \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot x + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K \qquad \int^x \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K$$

$$\int^x \tan t\ dt = -\ln|\cos x| + K \qquad \int^x \cot t\ dt = \ln|\sin x| + K$$

$$\int^x \cosh t\ dt = \sinh x + K \qquad \int^x \sinh t\ dt = \cosh x + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh x + K \qquad \int^x \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth x + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\cosh t} = 2\arctan(e^x) + K \qquad \int^x \frac{dt}{\sinh t} = \ln|\tanh x| + K$$

$$\int^x \tanh t\ dt = \ln(\cosh x) + K \qquad \int^x \coth t\ dt = \ln|\sinh x| + K$$

$$\int^x e^{\alpha t}\ dt = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + K, \quad \alpha \in \mathbb{C}^* \qquad \int^x a^t\ dt = \frac{a^x}{\ln a} + L, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

Pour $b \in \mathbb{R}^*$

$$\int^x \frac{dt}{t^2 + b^2} = \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b} + K \qquad \int^x \frac{dt}{t^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{|b|}\right) + K = -\arccos\left(\frac{x}{|b|}\right) + K$$

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right) + K\,.$$

2.4 Exercices.

Exercice 2.1. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{dt}{t^2+5} \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} \quad ; \quad \int^x e^t \sin(e^t)\ dt \quad ; \quad \int^x \tan^3 t\ dt \quad ;$$

$$\int^x \frac{1}{\tan^3 t}\ dt \quad ; \quad \int^x \frac{2t+3}{(t^2+3t+7)^m}\ dt,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int^x \frac{\ln t}{t}\ dt \quad ; \quad \int \frac{\cosh t\ dt}{\sinh^5 t}.$$

Exercice 2.2. *Considérons l'intégrale*

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Résultat : $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 2.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\ dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\ dt$.*

1. *Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.*
2. *Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.*
3. *Calculer I_2 en fonction de I_1.*
4. *Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.*

Exercice 2.4. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{2+t} + \sqrt[3]{2+t}}\ dt, \quad (u = \sqrt[6]{2+t}) \ ;$$

$$\int^x \frac{1}{((t-1)^2-4)^2}\ dt, \quad (\frac{t-1}{2} = \tanh u \ \textit{ou}\ \coth u) \ ;$$

$$\int^x (\arcsin t)^2\ dt \quad ; \quad \int^x t^2\sqrt{1+t^3}\ dt.$$

Exercice 2.5. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x e^t \cos t\ dt \quad ; \quad \int^x \frac{\ln t}{t^n}\ dt\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int^x t \mathit{Arctan} t\ dt \quad ; \quad \int^x (t^2+t+1)e^t\ dt.$$

Exercice 2.6. *Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt$.*

1. *Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.*
2. *Calculer I_n.*

3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 2.7. ***Intégrale de Wallis.*** *Soit* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \; dt$.

1. *Établir une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+2}.
2. *En déduire des formules explicites pour* I_{2p} *et* I_{2p+1}.
3. *Montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et strictement positive.*
4. *En déduire que* $I_n \sim I_{n+1}$.
5. *Calculer* nI_nI_{n+1}.
6. *Montrer que l'on a* $\lim_{n\to\infty} I_n\sqrt{2n/\pi} = 1$.

Exercice 2.8. *Soit* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. *En majorant la fonction intégrée, montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$.
3. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 2.9. *Calculer par récurrence :*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 2.10. *Calculer par récurrence :*

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

Exercice 2.11. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x (\cos t \cos 2t + \sin t \sin 3t) \; dt \quad ; \quad \int^x \cos t \sin^4 t \; dt \quad ; \quad \int^x \cos^6 t \; dt \quad ;$$

$$\int^x \sin^3 t \cos t \; dt \quad ; \quad \int^x \sin^4 t \; dt \quad ; \quad \int^x \sin^3 t \cos^2 t \; dt \quad ;$$

$$\int^x \cosh^2 t \sinh^2 t \; dt \quad ; \quad \int^x \sinh t \cosh^3 t \; dt \quad ; \quad \int^x \cosh t \sinh^3 t \; dt.$$

Exercice 2.12. *Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :*

$$x\cos^2 x, \quad \cos(2x)\cos^2 x\,.$$

Exercice 2.13. *Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.*

$$\frac{1}{a^2+x^2},\quad \frac{1}{(1+x^2)^2},\quad \frac{x^3}{x^2-4},\quad \frac{4x}{(x-2)^2},\quad \frac{1}{x^2+x+1},\quad \frac{1}{(t^2+2t-1)^2},$$

$$\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2},\quad \frac{3t+1}{t^2-2t+10},\quad \frac{1}{t^3+1},\quad \frac{x^3+2}{(x+1)^2},\quad \frac{x+1}{x(x-2)^2},\quad \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2},$$

$$\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)},\quad \frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2},\quad \frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Exercice 2.14. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{t^4+1}{t(t-1)^3}\,dt \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{(t^4+1)^2} \quad ; \quad \int^x \frac{t\ dt}{t^4+t^2+1} \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{(t-1)(t^2-2t-2)^2}.$$

Exercice 2.15. *Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :*

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)},\quad \frac{2x}{(1-x+x^2)^2},\quad \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)},\quad \frac{1}{(1+x^3)^3}.$$

Exercice 2.16. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{\cos^3 t}{\sin^5 t}\,dt \quad ; \quad \int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,dt \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{\cos^4 t+\sin^4 t} \quad ; \quad \int^x \frac{\cos t}{1+\sin 2t}\,dt \quad ;$$

$$\int^x \frac{\tan t-\tan a}{\tan t+\tan a}\,dt \quad ; \quad \int^x \frac{\sinh t\cosh t}{\sinh^4 t+\cosh^4 t}\,dt.$$

Exercice 2.17. *Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :*

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x},\quad \frac{1}{1+\tan x},\quad \frac{1}{th^2 x}$$

Exercice 2.18. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t-1}} \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} \quad ; \quad \int^x \frac{t}{\sqrt{9+4t^4}}\,dt \quad ;$$

$$\int^x \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt{t+1}}{t+2}\,dt \quad ; \quad \int^x \frac{t+1}{\sqrt{-4t^2+4t+1}}\,dt.$$

Exercice 2.19. *Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :*

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

Exercice 2.20. *Calculer les primitives suivantes.*

1. $\displaystyle\int^x e^{\sin^2 t} \sin 2t \ dt.$
2. $\displaystyle\int^x \cos^5 t \ dt \,;\, \int^x \cosh^3 t \ dt \,;\, \int^x \cos^4 t \ dt \,;\, \int^x \sinh^4 t \ dt.$
3. $\displaystyle\int^x t^3 e^t \ dt.$
4. $\displaystyle\int^x \ln t \ dt \,;\, \int^x t \ln t \ dt \,;\, \int^x \arcsin t \ dt.$
5. $\displaystyle\int^x \cosh t \sin t \ dt.$
6. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin t}.$
7. $\displaystyle\int^x \sqrt{a^2 - t^2} \ dt.$
8. $\displaystyle\int^x \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^t + 1}} \ dt.$
9. $\displaystyle\int^x e^{at} \cos bt \ dt \,;\, \int^x e^{at} \sin bt \ dt.$
10. $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{t}{(1-t)^3}} \ dt \quad \textit{pour} \quad 0 < x < 1.$
11. $\displaystyle\int^x \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \ dt.$
12. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t + 2 \sin t + 3}.$
13. $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{t} \ dt}{\sqrt{a^3 - t^3}} \qquad \textit{avec} \qquad 0 < x < a.$
14. $\displaystyle\int^x \frac{\cosh t}{\cosh t + \sinh t} \ dt.$

Exercice 2.21. *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int^x \frac{dt}{\cosh t \sqrt{\cosh 2t}} \quad ; \quad \int^x \frac{t}{\cos^2 t} \ dt \quad ; \quad \int^x \frac{1 + \cos 2t}{1 - \tan^2 t} \ dt \quad ;$$

$$\int^x \frac{\sin at + \cos bt}{e^t} \ dt \quad ; \quad \int^x \frac{t(2 + \cos t)}{\sin^2 t} \ dt.$$

Exercice 2.22. *Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :*

$$chx \sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$$

$$(x^2+2x+2)\cos(2x)$$

$$x^2\cos x \ \textit{ et } x^2 \sin x \ \textit{ en utilisant les complexes}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \ \textit{ et } \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

Exercice 2.23. *Calculer* $\int_0^1 \ln(1+x^2)$.

Exercice 2.24. *Soient* $I = \int_0^\pi x\cos^2 x dx$ *et* $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$.

1. *Calculer* I *et* $I+J$.
2. *En déduire* J.

Exercice 2.25. *Soit* $a_n = \int_0^1 t^n e^t \ dt$.

1. *Calculer* $a_0, \dots, a_4$.
2. *Etudier la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chapitre 3

Suites numériques. Compléments.

3.1 Bolzano-Weierstrass

Nous allons donner une propriété fondamentale des ensembles et des suites bornés de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) .
Pour $x_0 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\varrho \geq 0$, on notera $B_f(x_0, \varrho)$ (resp. $B(x_0, \varrho)$), la boule fermée (resp. ouverte) de centre x_0 et de rayon ϱ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$B_f(x_0, \varrho) = \{y \in \mathbb{K}, \quad |y - x_0| \leq \varrho\} \ .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $B_f(x_0, \varrho) = [x_0 - \varrho, x_0 + \varrho]$.

Définition 3.1.1. *Soit E une partie de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un point d'accumulation de E, si pour tout $\varepsilon > 0$, $E \cap B_f(x, \varepsilon)$ est infini.*

Remarque. Quitte à changer ε en 2ε, la définition avec les boules ouvertes est équivalente. En revanche comme pour la définition de la limite, $\varepsilon > 0$, ne peut être modifié en $\varepsilon \geq 0$.

Théorème 3.1.2. *Théorème de Bolzano-Weierstrass, 1ère version. Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) admet un point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).*

Démonstration : Soit E une partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$(resp. $\mathbb{C}$). Il existe $R > 0$ tel que $E \subset [-R, R]$ (resp. $E \subset [-R, R] \times [-R, R]$).
On raisonne par dichotomie (resp. en coupant des carrés en quatre).

- On construit une suite d'intervalles emboîtés (resp. de carrés) qui ont tous une intersection de cardinal infini avec E. On pose $I_0 = [a_0, A_0]$ avec $a_0 = -R$ et $A_0 = R$ (resp. $C_0 = [a_0, A_0] \times [b_0, B_0]$ avec $b_0 = a_0 = -R$ et $B_0 = A_0 = R$). L'ensemble $I_0 \cap E$ (resp. $C_0 \cap E$) est infini.
- Supposons $I_n = [a_n, A_n]$ (resp $C_n = [a_n, A_n] \times [b_n, B_n]$) construit tel que $E \cap I_n$ (resp. $E \cap C_n$) soit infini. On pose $a'_n = \frac{a_n + A_n}{2}$ (et $b'_n = \frac{b_n + B_n}{2}$). On subdivise ainsi I_n en deux intervalles (resp. C_n en quatre carrés)

$$I_n = [a_n, a'_n] \cup [a'_n, A_n] \, .$$

L'un des deux (resp. l'un des quatre) a forcément une intersection de cardinal infini avec E. On choisit $a_{n+1} = a_n$ et $A_{n+1} = a'_n$ si c'est le premier ; $a_{n+1} = a'_n$ et $A_{n+1} = A_n$ sinon (faire une raisonnement similaire sur C_n coupé en quatre).

On a construit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (resp. et éventuellement deux autres suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq A_n - a_n \leq \frac{2R}{2^n}, \quad (\text{et} \quad 0 \leq B_n - b_n \leq \frac{2R}{2n}\,) .$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B_n \in \mathbb{N}$) sont adjacentes. On note $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (resp. $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n + ib_n$). Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2R/(2^N) \leq \varepsilon/10$. On a alors

$$\begin{array}{ll} & (y \in I_N) \Rightarrow \left(|x-y| \leq \dfrac{2R}{2^N}\right) \Rightarrow (y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]) \\ \text{resp.} & (y \in C_N) \Rightarrow \left(|\mathbb{R}e(x-y)| \leq \dfrac{2R}{2N} \quad |\mathrm{Im}(x-y)| \leq \dfrac{2R}{2N}\right) \Rightarrow (|x-y| \leq \varepsilon)\ . \end{array}$$

On en déduit que l'intersection

$$\begin{array}{ll} & E \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \supset E \cap I_N \\ \text{resp.} & E \cap B_f(x,\varepsilon) \supset E \cap C_N \end{array}$$

est infinie. ■

Définition 3.1.3. *Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe, on dit que a est une valeur d'adhérence si il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Théorème 3.1.4. *Bolzano-Weierstrass, deuxième forme. Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration : C'est une conséquence directe de la première version. Il y a deux cas.

- $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini : Une des valeurs est prise une infinité de fois et on peut extraire une sous-suite constante (donc convergente).
- $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble borné infini : Alors il admet un point d'accumulation x. Pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_k} - x| \leq \frac{1}{2^k}$. On a alors $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = x$.

■

Corollaire 3.1.5. *Si $\overline{I}$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{R} = \overline{I}\times\overline{J}$ est un rectangle fermé borné de $\mathbb{C}$), alors toute suite de $\overline{I}$ (resp. de $\overline{R}$) admet une valeur d'adhérence dans $\overline{I}$ (resp. $\overline{R}$).*

Démonstration : Il suffit de passer à la limite dans les inégalités larges. ■

3.2 Suites de Cauchy.

Dans $\mathbb{R}$ les suites adjacentes permettent d'obtenir l'existence de limites sans les connaître a priori. On voit bien que l'on est une peu gêné avec les suites complexes : Si on ne passe pas par les abscisses et ordonnées, on ne peut pas utiliser les mêmes raisonnements que dans $\mathbb{R}$. La notion de suite de Cauchy résout cette difficulté.

Définition 3.2.1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe est de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ |u_m - u_n| \leq \varepsilon\,.$$

Remarque.

1. Il s'agit bien d'une propriété de la suite. La définition ne fait pas intervenir d'élément extérieur comme la limite dans la définition de la convergence.
2. **N.B.** La propriété d'être de Cauchy met en jeu tous les écarts possibles au dessus de l'indice N_ε.

Proposition 3.2.2. *Toute suite convergente de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est de Cauchy.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, \quad |u_m - u_n| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,.$$

■

Proposition 3.2.3. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est bornée.*

Démonstration : Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - u_{N_1}| \leq 1, \quad (m = N_1)\,.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max\left\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_1}|, |u_{N_1}| + 1\right\}\,.$$

■

Théorème 3.2.4. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) converge dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).*

Lemme 3.2.5. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe est une suite de Cauchy et admet une valeur d'adhérence ℓ alors elles converge vers ℓ.*

$$\begin{pmatrix} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy} \\ \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \ell \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} u_n = \ell\right).$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, \quad |u_m - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus il existe $n_{k_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$ tel que

$$\left|u_{n_\varepsilon} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On prend $m = n_{k_\varepsilon}$. On a trouvé $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leq \left|u_n - u_{n_{k_\varepsilon}}\right| + \left|u_{n_{k_\varepsilon}} - \ell\right| \leq \varepsilon,$$

ce pour tout $\varepsilon > 0$. ■

Démonstration (Fin de la preuve du Théorème 3.2.4.) : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est bornée. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence. Le lemme précédent nous dit alors qu'elle converge. ■

Remarque.

1. Le Théorème 3.2.4 se résume en disant que $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est complet. Le terme « complet » est particulièrement bien choisi : Il signifie qu'il n'est pas nécessaire de grossir l'ensemble pour avoir toutes les limites possibles (non infinies) de suites.
2. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet puisque $\sqrt{2}$ peut s'obtenir comme limite d'une suite de rationnels et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. L'importance de la notion de suite de Cauchy est que comme pour les suites adjacentes, cela donne une condition sur la suite toute seule pour qu'elle converge sans connaître a priori la limite.

Exemple. On considère dans $\mathbb{C}$ la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik^2-k}$. On a pour $n \geq m$,

$$|u_n - u_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} e^{-k} \leq \frac{e^{-m}}{e-1} \leq e^{-m}.$$

On obtient pour $N_\varepsilon \geq -\ln\varepsilon$,

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, \quad |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

La limite $\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik^2-k} = \lim_{n\to\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{C}$. Nous reviendrons sur cet exemple (voir séries absolument convergentes.)

3.3 Comparaison de suites, vitesse de convergence.

Définition 3.3.1. *Soit deux suites complexes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
– *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dominée par la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si*

$$\exists A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq A\,|v_n|$$

Notation. $u_n = O(v_n)$.

– *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est négligeable devant la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n| \ .$$

Notation. $u_n = o(v_n)$.

– *On dit que les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont équivalentes si* $u_n - v_n = o(v_n)$.

Notation. $u_n \sim v_n$.

Exercice 3.1. *Vérifier que* $\sim$ *définit bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ces définitions ont une traduction immédiate quand $v_n \neq 0$.

Proposition 3.3.2. *Avec les notations précédentes, si la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne s'annule pas, on a les équivalences*
– $u_n = O(v_n)$ *si et seulement si la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
– $u_n = o(v_n)$ *si et seulement si la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
– $u_n \sim v_n$ *si et seulement si la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1.

N.B. Les opérations ne se comportent pas toujours bien pour ces relations. Par exemple, $u_n \sim v_n$ n'implique pas en général $f(u_n) \sim f(v_n)$. Il vaut mieux refaire les raisonnements en revenant aux définitions.

Définition 3.3.3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers* ℓ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit que la convergence est*
– *lente si* $|u_n - \ell| = O(\frac{1}{n^\alpha})$ *pour* $\alpha \geq 0$.
– *géométrique si il existe* $\varrho \in (0,1)$ *tel que* $|u_n - \ell| = O(\varrho^n)$.
– *rapide si pour tout* $\varrho > 0$, $|u_n - \ell| = O(\varrho^n)$.

3.4 Sommes de Riemann, intégration numérique.

On se donne un intervalle $I = [a,b]$ avec $-\infty < a \leq b < \infty$ et une subdivision $x_k = a + k\Delta x$, $k \in \{0,\ldots,N-1\}$ avec $\Delta x = \frac{b-a}{N}$.

Définition 3.4.1. *On appelle somme de Riemann toute somme de la forme*

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} f(c_k) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(c_k)$$

avec pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$.
$\Delta x = \frac{b-a}{N}$ *est appelé le pas de la subdivision, ou pas de discrétisation.*

On a vu au Chapitre précédent les résultats suivant

Proposition 3.4.2. *Si* f *est continue sur* $[a, b]$ *et* $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite de sommes de Riemann de pas* $\frac{b-a}{N}$, *alors on a*

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Si de plus f *est continûment dérivable sur* $[a, b]$ *(*f *et* f' *continues) on a*

$$\int_a^b f(t)\, dt - S_N = O(\frac{1}{N})\,.$$

Remarque. Des cas particuliers intéressants sont $c_k = x_k = a + k\Delta x$, $c_k = x_{k+1} = a + (k+1)\Delta x$ et $c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k + 1/2)\Delta x$.

Exemple. Considérons la suite donnée par $u_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+k}$. On a

$$u_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1 + k/N} = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 + x_{k+1}}$$

avec $b = 1$, $a = 0$, $f(t) = \frac{1}{1+t}$. On en déduit

$$\lim_{N \to \infty} u_N = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

$$\text{et même} \qquad u_N - \ln 2 = O(\frac{1}{N})\,.$$

Remarque.

1. La méthode des trapèzes où le choix $c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ peut conduire à une erreur d'ordre $O(\frac{1}{N^2})$. (voir TD).
2. En général l'intégration numérique qui consiste à approcher une intégrale par une somme finie conduit à des erreurs d'ordre $O(\frac{1}{N^\alpha})$. Il s'agit d'une convergence lente. Néanmoins, plus l'exposant α est grand, plus la convergence est rapide. Le travail du numéricien consiste à trouver les méthodes les plus efficaces, c'est à dire qui amène à une précision donnée avec le moins de calculs possible. Ces questions sont abordées dans les cours C03 et F04.

3.5 Suites récurrentes (bis).

3.5.1 Points fixes.

On travaille sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et on considère une fonction $f : I \to I$ et qui est continue sur I. Nous allons étudier de façon plus précise la convergence des suites récurrentes données par

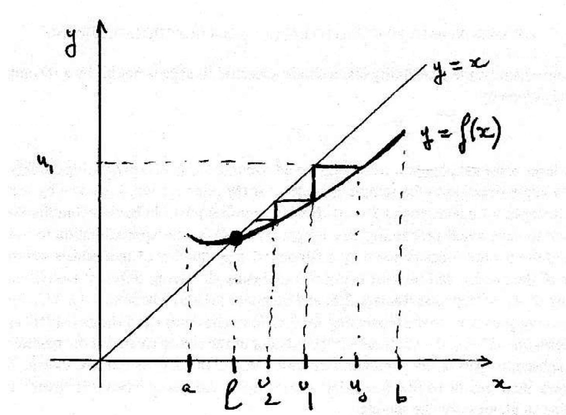
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad u_0 \in I\,.$$

Comme f envoie I dans lui même, la suite est bien définie. De plus la continuité nous dit que les limites possibles dans I sont des points fixes :

$$\ell = f(\ell)$$

Méthode d'étude :

1. Tracer sur un même dessin le graphe $y = f(x)$, la diagonale $y = x$ et les premières valeurs de la suite comme ci-dessous, pour avoir une idée du comportement. La figure ci-dessous donne un exemple. On peut rencontrer 4 types de figures : des escaliers convergents ou divergents ou des spirales convergentes ou divergentes.
2. Estimer l'écart entre $|f(x_2) - f(x_1)|$ en fonction de $|x_2 - x_1|$ par exemple en utilisant le théorème ou l'inégalité des accroissements finis.



Nous allons commencer par un résultat qui bien que n'étant pas le plus général met en oeuvre simplement l'étape 2.

Proposition 3.5.1. *On suppose que la fonction $f : I \to I$ admet un point fixe ℓ. On suppose de plus que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $J = I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$ et qu'il existe $\varrho < 1$ tel que*

$$\forall x \in J, \quad |f'(x)| \le \varrho\,.$$

Alors $f(J) \subset J$ et pour toute donnée initiale $u_0 \in J$ la suite récurrente donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge géométriquement vers ℓ :

$$|u_n - \ell| \le \varrho^n\, |u_0 - \ell|\,.$$

Démonstration : Pour $x \in J$, le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$|f(x) - \ell| = |f'(c)|\,|x - \ell| \leq \varrho\,|x - \ell|$$

en utilisant $\ell = f(\ell)$ puis le fait que le point c entre ℓ et x appartient à l'intervalle J. On en déduit alors pour $x \in J$

$$|f(x) - \ell| \leq |x - \ell| \leq \alpha\,.$$

Ainsi $f(x) \in I$ et $|f(x) - \ell| \leq \alpha$ entraîne $f(x) \in J$. L'inclusion $f(J) \subset J$ entraîne $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dès que $u_0 \in J$. La convergence géométrique vient ensuite de

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - \ell| \leq \varrho\,|u_n - \ell|\,.$$

■

Le résulat suivant ne demande que la dérivabilité au point ℓ.

Proposition 3.5.2. *On suppose que $\ell \in I$ est un point fixe de f, $\ell = f(\ell)$ et que f est dérivable au point ℓ. On a les trois cas possibles*

1. $|f'(\ell)| \in [0,1[$. *Alors il existe un intervalle I_c autour de ℓ, non réduit à ℓ, tel que u_n converge géométriquement vers ℓ dès que $u_0 \in I_c$, avec $|u_n - \ell| = O(\varrho^n)$ pour tout $\varrho \in]\,|f'(\ell)|\,,1[$. En particulier pour $f'(\ell) = 0$, la convergence vers ℓ est rapide.*
2. $|f'(\ell)| > 1$. *Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ seulement si elle stationne à ℓ.*
3. $|f'(\ell)| = 1$. *Pas de résultat général*

Définition 3.5.3. *Dans le cas 1 de la Proposition 3.5.2, on dit que le point fixe ℓ est attractif. Dans le cas 2, on dit qu'il est répulsif.*

Démonstration : 1) En revenant à la définition de la dérivée et en utilisant la continuité de la valeur absolue, on a

$$\lim_{\substack{x \to \ell \\ x \in I \setminus \{\ell\}}} \frac{|f(x) - \ell|}{|x - \ell|} = |f'(\ell)| < 1\,.$$

En explicitant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-|f'(\ell)|}{2}$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I \setminus \{\ell\}\,, \quad \left|\left|\frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell}\right| - |f'(\ell)|\right| \leq \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

On en déduit

$$\forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I \setminus \{\ell\}\,, \quad \left|\frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell}\right| \leq |f'(\ell)| + \varepsilon = \frac{|f'(\ell)| + 1}{2}\,,$$

$$\text{puis} \quad \forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I, \quad |f(x) - \ell| \leq \varrho_1\,|x - \ell|\,,$$

avec

$$\varrho_1 = \frac{|f'(\ell)| + 1}{2} < 1 \,.$$

Comme dans la preuve de la Propositon 3.5.1, la condition $u_0 \in I_c = [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I$ entraîne alors $u_n \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la convergence géométrique

$$|u_n - \ell| \leq |u_0 - \ell| \, \varrho_1^n \,.$$

De façon plus précise pour $\varrho \in] \, |f'(\ell)| \, , 1[$, on peut trouver un intervalle $\alpha_\varrho > 0$ tel que

$$\forall x \in [\ell - \alpha_\varrho, \ell + \alpha_\varrho] \cap I, \quad |f(x) - \ell| \leq \varrho \, |x - \ell| \,.$$

La convergence $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ entraîne qu'il existe $N_\varrho \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varrho, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha_\varrho \,.$$

On a alors

$$\forall n \geq N_\varrho, \quad |u_n - \ell| \leq \varrho^{n - N_\varrho} \left| u_{N_\varrho} - \ell \right| \leq C \varrho^n \,,$$

avec $C = \left| u_{N_\varrho} - \ell \right| / \varrho^{N_\varrho}$. On a donc $|u_n - \ell| = O(\varrho^n)$ pour tout $\varrho \in] \, |f'(\ell)| \, , 1[$.

2) Pour $|f'(\ell)| > 1$, on utilise à nouveau (3.1) avec $\varepsilon = \frac{|f'(\ell)| - 1}{2}$ pour écrire

$$\forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I \setminus \{\ell\} \,, \quad \left| \frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} \right| \geq |f'(\ell)| - \varepsilon = \frac{|f'(\ell)| + 1}{2} \,,$$

$$\text{puis} \quad \forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I, \quad |f(x) - \ell| \leq \varrho_1 \, |x - \ell| \,,$$

avec

$$\varrho_1 = \frac{|f'(\ell)| + 1}{2} > 1 \,.$$

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha \,.$$

On a alors pour $n \geq N$:

$$|u_{n+1} - \ell| \geq \varrho_1 \, |u_n - \ell| \,.$$

On en déduit

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \geq \varrho_1^{n-N} \, |u_N - \ell| \geq |u_N - \ell| \,.$$

L'hypothèse de convergence entraîne alors $u_N = \ell$, auquel cas la suite stationne puisque $f(\ell) = \ell$. ■

Avec une hypothèse supplémentaire, on peut encore raffiner la compréhension du cas $f'(\ell) = 0$.

Proposition 3.5.4. *On suppose la fonction $f : I \to I$ est dérivable sur I, admet un point fixe $\ell \in I$ avec $f'(\ell) = 0$ et que f est deux fois dérivable en ℓ. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq C\,|u_n - \ell|^2 \tag{3.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{(C\,|u_0 - \ell|)^{2^n}}{C}\,, \tag{3.3}$$

dès que $C\,|u_0 - \ell| < 1$.

Démonstration : On utilise d'abord le théorème des accroissements finis pour écrire pour $x \in I$

$$|f(x) - \ell| = |f(x) - f(\ell)| \leq |f'(c)|\,|x - \ell| \leq |f'(c) - f'(\ell)|\,|x - \ell|\,,$$

avec c compris entre ℓ et x. Comme f' est dérivable en ℓ, on a

$$\lim_{\substack{x \to \ell \\ x \in I \setminus \{\ell\}}} \frac{|f'(x) - f'(\ell)|}{|x - \ell|} = |f''(\ell)|\,.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes $K \geq 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall t \in I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]\,, \quad |f'(t) - f'(\ell)| \leq K\,|t - \ell|\,.$$

En supposant $x \in I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$, on peut appliquer cette inégalité avec $t = c$,

$$|f(x) - \ell| \leq K\,|c - \ell|\,|x - \ell| \leq K\,|x - \ell|^2\,.$$

On pose $C = \max\left\{\frac{1}{\alpha}, K\right\}$. On obtient

$$\forall x \in I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]\,, \quad C\,|f(x) - \ell| \leq (C\,|x - \ell|)^2\,.$$

On prend

$$I_c = I \cap \left[\ell - \frac{1}{C}, \ell + \frac{1}{C}\right] \subset I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]\,.$$

Il suffit de vérifier par récurrence $u_n \in I_c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dès que $C\,|u_0 - \ell| < 1$.
– Pour $n = 0$, c'est vrai. Puisque $|u_0 - \ell| \leq \frac{1}{C}$.
– Si $u_n \in I_c$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ et

$$C\,|u_{n+1} - \ell| = C\,|f(u_n) - \ell| \leq (C\,|u_n - \ell|)^2 \leq 1\,.$$

Ainsi $u_{n+1} \in I_c$.

■

Définition 3.5.5. *Quand une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ, vérifie une inégalité du type (3.2), on dit qu'il y a convergence quadratique vers ℓ.*

Remarque. Dans la convergence géométrique le nombre de décimales justes croît linéairement. Dans la convergence quadratique, le nombre de décimales croît exponentiellement. C'est une convergence très rapide.

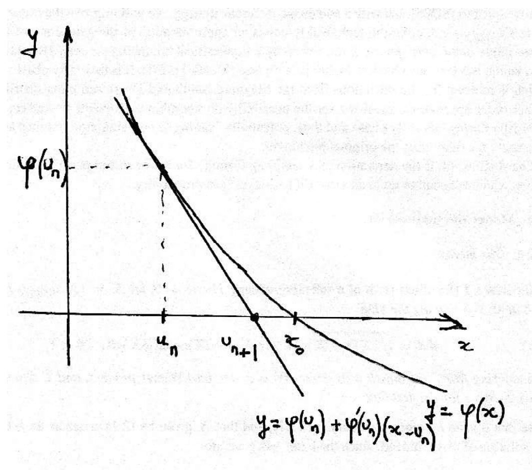
Exemple. On revient sur l'algorithme de Heron. On a $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ avec $a > 0$ et $x > 0$. $\sqrt{a}$ est le seul point fixe de f dans $I = \mathbb{R}_+^*$. On a de plus $f'(\sqrt{a}) = 0$. La convergence est quadratique. Vérifier la rapidité de la convergence à la machine.

3.5.2 Algorithme de Newton.

L'algorithme de Newton est une méthode itérative pour résoudre $\varphi(x) = 0$. En supposant connue une approximation u_n d'une solution x_0, on calcule explicitement u_{n+1} en remplaçant φ par son application affine tangente

$$\varphi(u_n) + \varphi'(u_n)(u_{n+1} - u_n) = 0.$$

En supposant $\varphi'(u_n) \neq 0$, on obtient



$$u_{n+1} = u_n - \frac{\varphi(u_n)}{\varphi'(u_n)} = f(u_n), \quad u_0 \in \mathbb{R}$$

en posant $f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$.

Proposition 3.5.6. *On suppose que φ est 2 fois continûment dérivable, que x_0 résout $\varphi(x_0) = 0$ avec $\varphi'(x_0) \neq 0$ et que φ admet une dérivée troisième en x_0. Alors il existe un intervalle I_c contenant x_0 et non réduit à x_0 tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers ℓ dès que $u_0 \in I_c$.*

Résumé : La méthode de Newton est très efficace si on ne part pas trop loin de « la » solution.

Remarque. En étant un peu plus soigneux, on peut se passer de l'hypothèse de l'existence de la dérivée troisième.

Démonstration : La fonction $f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ est dérivable deux fois dans un intervalle autour de x_0 car $\varphi'(x_0) \neq 0$ et φ' est continue en x_0. On a de plus

$$f'(x_0) = 1 - \frac{\varphi'(x_0)^2 - \varphi(x_0)\varphi''(x_0)}{\varphi'(x_0)^2} = 0\,.$$

On applique la Proposition 3.5.2. ∎

Remarque. L'algorithme de Newton est une méthode itérative de résolution des équations qui admet beaucoup de généralisations. C'est une technique classique de l'analyse numérique et du calcul scientifique. Elle est aussi utilisée en algèbre avec des structures plus exotiques que l'ensemble des réels.

Exercice 3.2. *Montrer que l'algorithme de Heron n'est rien d'autre que l'algorithme de Newton pour résoudre* $x^2 - a = 0$ *.*

3.6 Exercices.

Exercice 3.3. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* α_n *une suite convergente vers 0. Étudier la suite* $u_0 = a$, $u_{n+1} = 1/2(1+\alpha_n)u_n + 1/2$. *(montrer d'abord que la suite est bornée, puis montrer que si* $x \neq 1$ *est valeur d'adhérence,* $2x-1$ *l'est aussi, et aboutir à une contradiction).*

Exercice 3.4. *Montrer qu'une suite bornée de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *qui n'a qu'une valeur d'adhérence converge.*

Exercice 3.5. *Montrer que la suite* $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et que la suite* $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne l'est pas.*

Exercice 3.6. *On considère la suite définie pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

1. *Montrer que l'on a* $u_{2^{j+1}} - u_{2^j} \geq \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas de Cauchy.*
3. *Que peut-on dire de* $\lim_{n\to\infty} u_n$ *?*

Exercice 3.7. *Pour une suite réelle ou complexe* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *indiquer les relations logiques entre les propositions :*
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{C}$.
– $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy*.

Exercice 3.8. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ *est un intervalle. Donner un exemple de suite de* $[0,1]$ *dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est tout* $[0,1]$.

Exercice 3.9. *Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.*

Exercice 3.10. *Montrer que si* (u_n) *est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite* (u_{n_k}) *de* (u_n) *telle que :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \geq p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

Exercice 3.11. *Une suite* (x_n) *est définie par une relation de récurrence* $x_{n+1} = a\sin x_n + b$ *où* a *est un nombre réel de* $]0,1[$ *et* b *un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leq a^p|x_1 - x_0|$. *En déduire que la suite* (x_n) *est une suite de Cauchy.*
Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ *à* 10^{-10} *près si on suppose* $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$ *?*

Exercice 3.12. ***Théorème de Picard :*** *On dit qu'une application* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, est* ϱ*-Lipschitzienne si*

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad |f(y) - f(x)| \leq \varrho\, |x - y| \ .$$

- *Montrer que si* f *est* ϱ*-Lipschitzienne avec* $\varrho < 1$*, toute suite récurrente donnée par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *est de Cauchy.*
- *En déduire qu'une fonction* f *qui est* ϱ*-Lipschitzienne avec* $\varrho < 1$ *admet un unique point fixe dans* $\mathbb{K}$ *.*

Exercice 3.13. *Vérifier que la relation* $u_n \sim v_n$ *définit une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *.*

Exercice 3.14. *Soit* $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$*.*

1. *Montrer que* $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(x)(\alpha - x)(\beta - x)dx$*.*
2. *En déduire un encadrement de* $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ *si* $\forall x \in [\alpha, \beta]$ $m \leq f''(x) \leq M$*.*
3. *En déduire*
$$\int_a^b f(t)\ dt - \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$
avec $x_k = a + k\frac{b-a}{N}$ *.*

Exercice 3.15. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2})$*.*

Exercice 3.16. *Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 3.17. *Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \ ; \ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \ ; \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} \ ; \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite réelle définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$*.*

Exercice 3.18. *On utilise dans l'espace muni d'un repère orthonormé les coordonnées cartésienne* (x, y, z) *. On considère la sphère* S_R *de rayon* $R > 0$ *et de centre* $O = (0, 0, 0)$ *.*

1. *Vérifier que pour* $h \in (-R, R)$*, le cercle* $S_R \cap \{z = h\}$ *a pour rayon* $\varrho(h) = \sqrt{R^2 - h^2}$ *.*
2. *Expliquer pourquoi le volume de la sphère doit être* $\int_{-R}^{R} \pi \varrho(h)^2 \, dh$ *.*
3. *En déduire que le volume de la sphère est* $\frac{4\pi R^3}{3}$ *.*

Exercice 3.19. *Soit* $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$*. On considère* $a \in [0, 1]$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $u_0 = a$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$*. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :*

1. *Si* f *est croissante, alors* (u_n) *est croissante.*
2. *Si* (u_n) *est croissante, alors* f *est croissante.*
3. *Si* (u_n) *est croissante et* f *monotone, alors* f *est croissante.*
4. *Si* (u_n) *converge vers une limite* l*, alors* l *est point fixe de* f*.*
5. *Si* f *est dérivable, alors* (u_n) *est bornée.*
6. *Si le graphe de* f *est au dessus de la droite d'équation* $y = x$*, alors* (u_n) *est croissante.*
7. *Si* (u_n) *converge vers un point fixe* l *de* f*, alors* f *est continue en* l*.*

Exercice 3.20. *Étudier la suite définie par* $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$ *dans les cas suivants :*

1. $u_0 = -4$.
2. $u_0 = -2$.
3. $u_0 = 2$.
4. $u_0 = 3$.

Exercice 3.21. *Pour* $\alpha > 0$*, on veut résoudre l'équation* $e^{-\alpha x} = x$ *.*
- *Vérifier que cette équation admet une unique solution* x_α *dans* $\mathbb{R}$ *.*
- *Montrer que pour* $\alpha \in [0, 1[$*, la suite récurrente donnée par* $u_n = e^{-\alpha u_n}$*,* $u_0 \in \mathbb{R}$*, converge vers* x_α *.*
- *Vérifier que la suite précédente ne converge vers* x_α *que si elle est stationnaire quand* $\alpha > 1$ *.*
- *Dans le cas* $\alpha > 1$*, vérifier que la suite donnée par* $v_{n+1} = -\frac{\ln v_n}{\alpha}$*,* $v_0 \in]\alpha^{-1}, 1[$ *converge vers* x_α *.*

Exercice 3.22. *Vérifier que le polynôme* $X^3 + 3X - 7$ *s'annule une seule fois sur* $\mathbb{R}$ *et que cette racine réelle appartient à* $[0, 2]$ *.*
Ecrire un algorihtme de Newton pour résoudre $X^3 + 3X - 7$ *et donner une approximation à* 10^{-8} *près de la solution.*

Exercice 3.23. *Etudier la suite* (u_n) *définie par*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (u_n^2 - 3u_n + 4) \ \forall n \geq 0.$$

Chapitre 4

Séries numériques.

4.1 Définitions et premières propriétés.

4.1.1 Séries et opérations.

Définition 4.1.1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de terme général a_n la suite de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$), $\left((a_n, \sum_{k=0}^{n} a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La quantité $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est appelée somme partielle d'indice n .*

Notation. On note parfois simplement $\sum a_n$ la série de terme général a_n. Notation qu'il ne faut pas confondre à $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ à laquelle nous allons donner un autre sens. Une autre notation utilisée est $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. En fait il suffit de connaître les a_n pour connaître la série. Inversement si on connaît les sommes partielles, on peut tout retrouver avec $a_n = S_n - S_{n-1}$, avec la convention $S_{-1} = 0$. La définition insiste sur le fait qu'il faut considérer en même temps les termes et les sommes partielles.

Définition 4.1.2. *Opérations sur les séries : On considère deux séries de terme général a_n et b_n .*

Troncature *La série de terme général $(a_{n_0+n}, \sum_{k=n_0}^{n_0+n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série déduite de $(a_n, \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ par troncature à n_0 . Pour les sommes partielles cela revient à annuler les premiers termes d'indice $< n_0$.*

Combinaison linéaire *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la combinaison linéaire de coefficients α et β est la série de terme général $\alpha a_n + \beta b_n$ et de somme partielle :*

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) .$$

Produit *La série produit est la série de terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} a_{k_1} b_{k_2}.$$

4.1.2 Séries bornées et convergentes.

Définition 4.1.3. *On dit qu'une série est bornée si la suite des sommes partielles est bornée.*

Proposition 4.1.4. *La suite des termes d'une série bornée est bornée.*

Démonstration : Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $(a_n = S_n - S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Remarque. En revanche, la série n'est pas forcément bornée quand la suite des termes est bornée. Exemple : $a_n = 1$, $S_n = n$.

Définition 4.1.5. *On dit qu'une série converge (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si la suite des sommes partielles converge (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.*

Remarque. On utilise la même notation si la limite est $\pm\infty$ ou ∞ sans dire pour autant qu'elle converge.

Proposition 4.1.6. *Si la série de terme général a_n converge alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Démonstration : On écrit simplement

$$a_n = S_n - S_{n-1} \overset{n\to\infty}{\to} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = 0\,.$$

■

Exemple. La réciproque est fausse. L'exemple classique est celui de la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $n = 2^p$, on a

$$\sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{2^{j+1}} \geq \frac{p}{2} \overset{p\to\infty}{\to} +\infty\,.$$

Définition 4.1.7. *Si la série de terme général a_n converge, on appelle reste au rang n le nombre*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - S_n\,.$$

Proposition 4.1.8. *Si la série converge la suite des restes a pour limite 0.*

Exemple. La série géométrique de raison ϱ est la série de terme général $a_n = \varrho^n$. Comme la somme partielle vaut

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k = \frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho} \quad (S_n = n+1 \text{ si } \varrho = 1)\,,$$

la série converge si et seulement si $|\varrho| < 1$. Si la série converge $\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k = 1/(1-\varrho)$.

Exemple. Série téléscopique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La série de terme général $a_n = u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite converge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to\infty} u_n - u_0$, en vertu de :

$$u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k \,.$$

4.1.3 Produit infini.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $\ln z$ en passant en polaire

$$z = \varrho e^{i\theta}, \varrho > 0, \theta \in]-\pi, \pi], \quad \ln z = \ln \varrho + i\theta \,.$$

Proposition 4.1.9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^*$, telle que la série de terme général $\ln u_n$ converge, alors le produit*

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \Pi_{n=0}^{N} u_n$$

existe.

Démonstration : On écrit

$$\prod_{n=0}^{N} u_n = \prod_{n=0}^{N} e^{\ln u_n} = e^{\sum_{n=0}^{N} u_n}$$

et on utilise la continuité de la fonction exponentielle. ∎

Remarque. Pour étudier les produits infinis, on utilise l'exponentielle et le logarithme pour se ramener aux séries.

4.2 Séries positives.

4.2.1 Généralités.

Théorème 4.2.1. *Une série de terme général $a_n \geq 0$ vérifie :*
– Soit la série est bornée et alors elle converge avec $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}_+$.
– Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.
On a de plus l'équivalence

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0) \,.$$

Démonstration : En fait la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est une suite croissante. Soit elle est bornée et elle converge dans $\mathbb{R}_+$ soit elle tend vers $+\infty$. ∎

Remarque. En conséquence la somme d'une série positive est toujours définie dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Exemple. On a déjà vu (en TD) un exemple de série positive avec l'écriture décimale des réels positifs : $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 10^{-k}$.

Proposition 4.2.2. *Principe de comparaison. Pour deux séries positives de terme général a_n et b_n et telle que $a_n \leq b_n$, l'inégalité suivante est valable dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

Démonstration : Les sommes partielles vérifient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} b_n .$$

On a alors trois cas :
- Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ alors $\sum_{n=0}^{N} b_n$ est minorée par une suite de limite $+\infty$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, l'inégalité est toujours vraie.
- Si les deux séries convergent, alors on passe à la limite dans les inégalités larges.

∎

Proposition 4.2.3. *Le comportement de la somme et de la série produit de deux séries de termes $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ est donné par*

$$(somme) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

$$(produit) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) .$$

avec la convention $0 \times +\infty = 0$ si l'une des deux séries est identiquement nulle.

Démonstration : Pour la somme on écrit au niveau des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)$$

et on passe à la limite quand $N \to \infty$.
Pour le produit on écrit

$$\left(\sum_{k=0}^{E(N/2)} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{E(N/2)} b_k\right) \leq \sum_{k_1+k_2\leq N} a_{k_1}b_{k_2} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\leq \sum_{k_1\leq N, k_2\leq N} a_{k_1}b_{k_2} = \left(\sum_{k_1=0}^{N} a_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{N} b_{k_2}\right)$$

On applique alors le théorème des gendarmes si les deux séries convergent. Si une des deux séries est de somme infinie et l'autre non nulle on minore par le membre de gauche. Si une des séries est nulle, toutes les sommes partielles sont nulles. ■

Les deux propositions suivantes disent que pour une série positive, la somme ne dépend pas de la façon dont on ordonne et regroupe les calculs.

Proposition 4.2.4. *Associativité. Si $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et de limite $+\infty$, les séries positives de terme général $a_m \geq 0$ et $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n$ ont même somme :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n\right) \quad in\ \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (a_n \geq 0)\,.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire pour $\nu \leq n_{M+1} - 1 \leq N$,

$$\sum_{n=0}^{\nu} a_n \leq \sum_{m=0}^{M} \sigma_m \leq \sum_{n=0}^{N} a_n$$

et d'utiliser le théorème des gendarmes, ou simplement une minoration si la somme de gauche tend vers $+\infty$, avec $\nu \to \infty$ (et donc $M \to \infty$, $N \to \infty$). ■

Proposition 4.2.5. *Commutativité. Si p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (permutation de $\mathbb{N}$), alors les séries positives de terme général $a_n \geq 0$ et $a_{p(n)}$ ont même somme.*

Démonstration : Si p est une permutation de $\mathbb{N}$, alors pour tout N il existe $M(N)$ et $L(N)$ tels que

$$\{p(n), 0 \leq n \leq N\} \subset \{0, \ldots, M(N)\} \subset \{p(n), 0 \leq n \leq L(N)\}\ ,$$

avec $\lim_{N\to\infty} M(N) = \lim_{N\to\infty} L(N) = +\infty$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{N} a_{p(n)} \leq \sum_{n=0}^{M(N)} a_n \leq \sum_{n=0}^{L(N)} a_{p(n)}\,.$$

En considérant la limite $N \to \infty$, le théorème des gendarmes, ou une simple minoration si la somme de gauche tend vers $+\infty$, entraîne l'égalité des sommes des deux séries. ■

4.2.2 Comparaison intégrale et série.

Le résultat suivant donne un moyen simple d'étudier des séries positives.

Proposition 4.2.6. *Soit f une fonction continue, positive ou nulle et décroissante sur $[a, +\infty[$. Les inégalités suivantes ont lieu dans $\overline{\mathbb{R}_+}$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a+k) \leq \int_a^{\infty} f(t)\ dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)\,.$$

Démonstration : On rappelle qu'une fonction continue admet une primitive. Soit F une primitive de f sur $[a, +\infty[$. La fonction $F - F(a)$ est croissante et admet donc une limite

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a+k}^{a+k+1} f(t)\ dt \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\ .$$

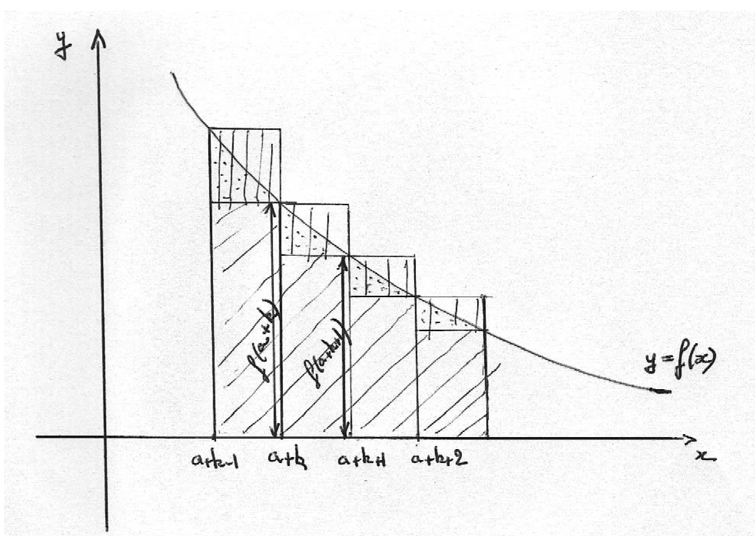
On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [a+k, a+k+A], f(a+k+1) \leq f(t) \leq f(a+k)\,.$$

En intégrant entre $a+k$ et $a+k+1$, on obtient

$$f(a+k+1) \times 1 \leq \int_{a+k}^{a+k+1} f(t)\ dt \leq f(a+k)$$

et il suffit d'utiliser le principe de comparaison des séries positives. ■



4.2.3 Application.

Définition 4.2.7. *On appelle série de Riemann une série de terme général* $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
On appelle série de Bertrand une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geq 2$, *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.8. *La série de Riemann de terme* $\frac{1}{n^\alpha}$, $n > 0$, *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
La série de Bertrand de terme $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Démonstration : Série de Riemann : Si $\alpha \leq 0$ alors $1/n^\alpha = n^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha = +\infty$.
Pour $\alpha < 0$ la fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et positive sur $[1, +\infty[$. Il suffit donc de regarder la limite quand $x \to +\infty$ de

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1 \,. \end{cases}$$

On voit que f_α est intégrable sur $[1, \infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
Série de Bertrand : Pour $\alpha < 1$ on écrit

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta n} \,.$$

Comme $\frac{1-\alpha}{2} > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta n} = +\infty$. On peut trouver une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \geq \frac{C}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \,.$$

On obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} = +\infty \quad (\alpha < 1) \,.$$

De façon similaire, pour $\alpha > 1$, on obtient en utilisant $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1} 2 \ln^\beta n} = 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} < +\infty \quad (\alpha > 1) \,.$$

Enfin dans le cas $\alpha = 1$, on remarque que la fonction $f(t) = \frac{1}{t \ln^\beta t}$ est décroissante pour $t \geq t_\beta$. Sa primitive vaut

$$\int^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \begin{cases} \frac{-1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x} + K & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) + K & \text{si} \quad \beta = 1 \,. \end{cases}$$

■

4.3 Série absolument convergente.

4.3.1 Définition et convergence.

Définition 4.3.1. *On dit qu'une série de terme général a_n, réelle ou complexe, est absolument convergente si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \,.$$

Théorème 4.3.2. *Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute série absolument convergente converge.*

Démonstration : On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $\Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$. Pour $N \geq M$, on a

$$|S_N - S_M| = \left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| \leq \Sigma_N - \Sigma_M \,.$$

Comme la suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N \geq M \geq N_\varepsilon, \quad |S_N - S_M| \leq \Sigma_N - \Sigma_M \leq \varepsilon \,.$$

La suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) qui est complet, elle converge dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) . ■

Remarque. Pour une série positive convergence et absolue convergence signifie la même chose.

4.3.2 Principes de comparaison.

Proposition 4.3.3. *Pour deux séries numériques de terme général a_n et b_n telles que $a_n = O(b_n)$, alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente dès que $\sum b_n$ l'est.*

Démonstration : Supposons $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty$. Comme $a_n = O(b_n)$ alors il existe $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C\,|b_n| \;.$$

Cela entraîne $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty$. ■

Corollaire 4.3.4. *Si les termes généraux sont équivalents $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum b_n$ converge absolument.*

Démonstration : L'équivalence $a_n \sim b_n$ implique $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$. ■

Exemple. Toute série $\sum a_n$ telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 1$ est absolument convergente. Même chose si $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n})$, avec $\alpha > 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) est absolument convergente.

Théorème 4.3.5. *Critère de d'Alembert. Si* $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$*, alors la série* $\sum a_n$ *est absolument convergente si* $L<1$ *et ne converge pas si* $|L|>1$
Critère de Cauchy. Si $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = L$ *alors la série* $\sum a_n$ *est absolument convergente si* $L<1$ *et ne converge pas si* $L>1$ *.*

Démonstration : d'Alembert Notons d'abord que l'hypothèse contient $a_n \neq 0$ pour $n \geq N_0$ avec N_0 assez grand. Supposons $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |a_{n+1}| \leq \frac{L+1}{2}|a_n| \,.$$

On obtient $|a_n| = O(\varrho^n)$ avec $\varrho = \frac{L+1}{2} < 1$. Comme $\sum_{n=0}^{\infty}\varrho^n < +\infty$, la série $\sum a_n$ est absolument convergente.
Supposons $L>1$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$, $N\geq N_0$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |a_{n+1}| \geq \frac{L+1}{2}|a_n| \geq |a_N| > 0\,.$$

Comme le terme a_n ne tend pas vers 0, la série ne peut pas converger. .
Cauchy Si $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = L < 1$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |a_n| \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$$

et on conclut comme précédemment.
Si $L>1$, on peut trouver $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |a_n| \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n \geq 1$$

et on conclut comme précédemment. ■

4.3.3 Opérations sur les séries absolument convergentes.

Proposition 4.3.6. *Dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, la combinaison linéaire ou la série produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. On a de plus les formules*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right) + \beta\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)\,.$$

Démonstration : L'absolue convergence vient de la domination

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha|\,|a_n| + |\beta|\,|b_n|$$
$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|b_{n-k}|$$

et du résultat sur les séries positives (membre de droite).
Les formules s'obtiennent ensuite comme ceci :
– Pour la combinaison linéaire, on passe à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) + \beta \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) .$$

– Pour la série produit on utilise passe à la limite dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\right| &\leq \sum_{N<k_1+k_2} |a_{k_1}|\,|b_{k_2}| \\ &\leq \left(\sum_{k_1=E(N/2)}^{\infty} |a_{k_1}|\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} |b_{k_2}|\right) + \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} |a_{k_1}|\right)\left(\sum_{k_2=E(N/2)}^{\infty} |b_{k_2}|\right)\end{aligned}$$

où le membre de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$. On a utilisé le fait que $k_1 + k_2 > N$ entraîne $k_1 > N/2$ ou $k_2 > N/2$.

■

Les résultats suivants permettent de regrouper les calculs comme on veut si la série converge absolument.

Proposition 4.3.7. ***Associativité.*** *Si $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et de limite $+\infty$ et si la série de terme général a_m est absolument convergente alors la série $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n$ est absolument convergente et de même somme.*
Commutativité. *Si p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (permutation de $\mathbb{N}$), alors la série de terme général a_n est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $a_{p(n)}$ l'est. Dans l'affirmative les deux séries ont même somme.*

Démonstration : Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, l'associativité et la commutativité des séries positives donnent alors

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty} |\sigma_m| \leq \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} |a_n|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_{p(n)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty .\end{aligned}$$

Les séries de termes σ_m et $a_{p(n)}$ sont absolument convergentes.
On compare les limites maintenant. Pour l'associativité, on écrit

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m = \sum_{n=0}^{n_M-1} a_n$$

et on passe à la limite quand $M \to \infty$. Pour la commutativité, la bijectivité de p permet d'écrire pour $N \in \mathbb{N}$

$$\{p(n), 0 \leq n \leq N\} \subset \{0, \dots, M(N)\} \subset \{p(n), 0 \leq n \leq L(N)\} ,$$

avec $\lim_{N\to\infty} M(N) = \lim_{N\to\infty} L(N) = +\infty$. La majoration

$$\left|\sum_{n=0}^{M(N)} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_{p(n)}\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{L(N)} a_{p(n)} - \sum_{n=0}^{N} a_{p(n)}\right| + \left|\sum_{n=0}^{M(N)} a_n - \sum_{n=0}^{L(N)} a_{p(n)}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left|a_{p(n)}\right| + \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$$

où le membre de droite tend vers 0 quand $N \to \infty$, donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)} .$$

$\blacksquare$

Résumé : On a le droit de faire les même choses avec les séries absolument convergentes qu'avec les séries positives.

4.4 Séries semi-convergentes.

4.4.1 Généralités.

Définition 4.4.1. *On dit qu'une série de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est semi-convergente si elle converge mais n'est pas absolument convergente.*

Définition 4.4.2. *On dit qu'une série de terme général $a_n \in \mathbb{R}$ est alternée si $a_n = (-1)^n |a_n|$ (ou $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$).*

Théorème 4.4.3. *Une série alternée de terme général a_n et telle que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et de limite nulle, converge.*

Démonstration : Supposons $a_n = (-1)^n |a_n|$ pour fixer les idées. L'égalité

$$S_{N+2} - S_N = a_{N+2} + a_{N+1} = (-1)^{N+1} (|a_{N+1}| - |a_{N+2}|)$$

et la décroissance de $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ impliquent que la suite $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante tandis que la suite $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a de plus $\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} - S_{2N} = \lim_{N\to\infty} a_{2N+1} = 0$ de telle sorte que les deux suites sont adjacentes. Elles ont même limite et toute la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite. $\blacksquare$

Exemple. La série de terme général $(-1)^n n^{-1}$ est semi-convergente.
N.B. On n'a pas le droit de regrouper les termes ou de permuter les termes d'une série semi-convergente.

Exemple. On reprend l'exemple ci-dessus avec $a_n = (-1)^n n^{-1}$. Pour $n_m = 2^m$, on pose $\sigma_m^0 = \sum_{k=n_{m-1}}^{n_m-1} a_{2k}$ et $\sigma_m^1 = \sum_{k=n_{m-1}}^{n_m-1} a_{2k+1}$. On a $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n = \sigma_m^0 + \sigma_m^1$. Mais

$$\sigma_m^0 = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{2k} \geq 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}\,.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{2^M-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{m=1}^{M} \sigma_m^0 + \sum_{m=1}^{M} \sigma_m^1$$

mais on ne peut pas passer à la limite dans le membre de droite (Forme Indéterminée avec $\sum_{m=1}^{M} \sigma_m^0 = +\infty$ et $\sum_{m=1}^{M} \sigma_m^1 = -\infty$.

Remarque. De la même façon la série produit de deux séries semi-convergentes peut ne pas converger. La seule opération permise est la combinaison linéaire.

4.4.2 Règle d'Abel.

La règle d'Abel repose sur une intégration par partie discrète qui permet de montrer que certaines séries convergent. Pour une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on note $(U_k')_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par

$$U_k' = U_{k+1} - U_k = \frac{U_{k+1} - U_k}{1}\,.$$

Lemme 4.4.4. *Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On a la formule*

$$\sum_{k=1}^{K} U_k' V_k = [U_{K+1}V_K - U_1 V_0] - \sum_{k=1}^{K} U_k V_{k-1}'$$

Démonstration : On écrit

$$U_k'V_k + U_kV_{k-1}' = (U_{k+1} - U_k)V_k + U_k(V_k - V_{k-1}) = U_{k+1}V_k - U_kV_{k-1}\,.$$

La somme $\sum_{k=1}^{K} U_k'V_k + U_kV_{k-1}'$ est une somme télescopique égale $U_{K+1}V_K - U_1V_0$. ■

Théorème 4.4.5. *Règle d'Abel. Si une série de terme général a_n est bornée et si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série de terme général a_nb_n converge.*

Démonstration : Pour $N \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$\sum_{k=N+1}^{N+K} a_k b_k = \sum_{k=1}^{K} U_k'V_k = U_{K+1}V_K - U_1V_0 - \sum_{k=1}^{K} U_kV_{k-1}'\,.$$

avec $U_n = \sum_{k=N}^{N+n-1} a_k$, et $V_n = b_{N+n}$. On obtient

$$\sum_{k=N+1}^{N+K} a_k b_k = \left(\sum_{k=N}^{N+K} a_k\right) b_{N+K} - a_N b_N - \sum_{k=1}^{K} U_k (b_{N+k} - b_{N+k-1})\,.$$

Les hypothèses sur la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la borne supposée $|U_n| \leq C$ donnent

$$\left|\sum_{k=1}^{K} U_k (b_{N+k} - b_{N+k-1})\right| \leq -C \sum_{k=1}^{N} (b_{N+k-1} - b_{N+k}) \leq C b_N\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N, M \geq N_\varepsilon, \left|\sum_{k=0}^{M} a_k b_k - \sum_{k=0}^{N} a_k b_k\right| \leq C b_{N_\varepsilon} \leq \varepsilon\,.$$

(Prendre $M = N + K$ avec $N \geq N_\varepsilon$ et $K \in \mathbb{N}$). La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{N} a_k b_k)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc elle converge dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). ∎

4.5 Exercices.

Exercice 4.1. ***Constante d'Euler .***

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité*

$$\left| \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2} \,.$$

Indication : Intégrer entre 0 *et* 1 *la dérivée de* $t \to \ln(n+t) - \ln(n) - \frac{t}{n}$.

2. *En déduire que la série de terme général* $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *est absolument convergente.*

3. *En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) = \gamma \,.$$

Ce nombre γ est appelé constante d'Euler.

Exercice 4.2. ***Fonction zeta*** *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{R}\mathrm{e}s > 1$.*

1. *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^s}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est absolument convergente. La fonction*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

est la fonction zeta introduite par B. Riemann.

2. *En notant p_i, le $i^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que le produit*

$$\Pi_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-s}} \right)$$

converge. Indication : on utilisera la minoration $p_i \geq i$ et l'équivalence $\ln(1+u) \sim u$ *quand $u \to 0$.*

3. *Vérifier l'identité*

$$\frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} p_i^{-ks} \,.$$

4. *Montrer l'encadrement*

$$\sum_{n=1}^{I} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-s}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \,.$$

5. *En déduire* $\zeta(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-p_i^{-s}} \right)$.

Exercice 4.3. ***Intégrale impropre et série.*** *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. In note*

$$I_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(t)\ dt \quad et \quad A_n = \int_{n}^{n+1} |f(t)|\ dt\,.$$

1. *On suppose $f \geq 0$, montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ converge si et seulement si la série $\sum I_n$ converge.*
2. *Montrer que si la série $\sum I_n$ converge et $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.*
3. *Donner un exemple de fonction périodique qui montre que la condition $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ est nécessaire.*
4. *Que dire de $f(t) = \frac{\sin(t\pi)}{t}$ définie pour $t \geq 1$.*

Exercice 4.4. *Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est :*

1. $1/n$ *mètre ?*
2. $1/n^2$ *mètre ?*

Exercice 4.5. *Soient, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.*

1. *Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geq 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.*
2. *En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.*
3. *Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.*
   Indication *: Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.*

Exercice 4.6. *Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.*

Exercice 4.7. *Etudier la série de terme général*

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b.

Exercice 4.8. *Etudier les séries de terme général*

1. $$u_n = \sqrt{n!}\sin x \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$

2. $$v_n = e^{an^2}(1-\frac{a}{n})^{n^3}$$

Exercice 4.9. *Etudier les séries de terme général*

1. $$u_n = cos(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}) \text{ avec } a > 0$$

2. $$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$

3. $$w_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 4.10. *Soit* (u_n) *une suite de réels strictement positifs, on suppose que* $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ *et que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \quad \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. *Etudier* $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ *et montrer que* (v_n) *a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général*

$$u_n = \sqrt{n!}\sin 1 \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 4.11. *Déterminer la nature de la série de terme général :*

1. $\frac{n!}{n^n}$, $(\cosh\sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$, $n^{lnn}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 4.12. *Etudier, suivant les valeurs de* $p \in \mathbb{N}$, *la nature de la série de terme général :*

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 4.13. *Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :*

1. $\sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

Exercice 4.14. *Soit* (u_n) *une suite réelle positive et* $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. *Comparer la nature des séries* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum \dfrac{u_n}{S_n})$.

Exercice 4.15. *Etudier les séries de terme général*

1.
$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

2.
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

3.
$$w_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ...

Exercice 4.16. *Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n *en*

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi + x)^4 \sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n *par les termes de la suite* v_n *où*

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n *et en déduire un équivalent de* u_n. *Conclure.*

Exercice 4.17. *Soit* u_n *une suite décroissante à termes positifs. On suppose* $(\sum u_n)$ *converge. Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} (nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^n u_k$ *pour* $n > p$. *Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons.*

Exercice 4.18. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, et que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ *converge.*

Exercice 4.19. *En justifiant votre réponse, classer les dix séries* $\sum u_n$ *suivantes en 4 catégories*
– *GD : celles telles que* u_n *ne tend pas vers 0 ;*
– *ZD : celles qui divergent et telles que* $\lim u_n = 0$;
– *AC : celles qui convergent absolument ;*
– *SC : celles qui convergent, mais non absolument.*
(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ *est SC, il faut montrer que* $\sum u_n$ *converge et que* $\sum |u_n|$ *diverge.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice 4.20.

1. *On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme*

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

   Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ *et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.*
2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. *Montrer la convergence de la série* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$ *et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.*
4. *L'intégrale impropre* $\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ *converge t-elle ? Si oui, la calculer.*